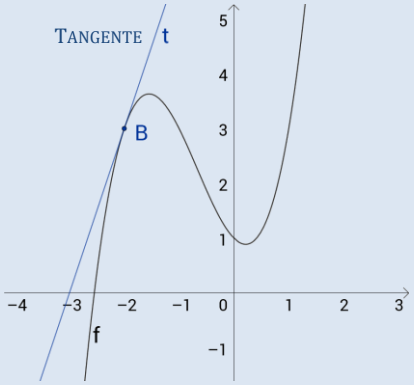
Was ist eine Tangente?

Eine Tangente an einen Graphen ist eine Gerade, die in dem Punkt, in dem sie den Graphen berührt*, **die gleiche Steigung** besitzt wie der Graph selbst. An diesem Punkt ***schmiegt*** sie sich an den Graphen an.

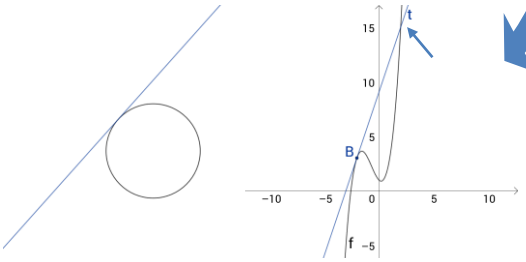


Es gilt für den Berührpunkt B: $f'(x_B)=m_t$

Für den Berührpunkt* B(-2|3) gilt:
$f'(-2)=m_t=3$
Da die Tangente die y-Achse bei y=9 schneidet, ergibt sich daraus für t die Geradengleichung t(x)=3x+9

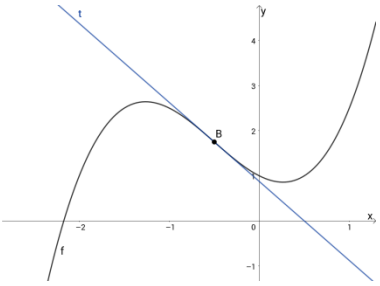
Nur in einem Punkt!?

Du kennst Tangenten bereits von Kreisen. Hier werden Tangenten häufig als Geraden definiert, die den Kreis nur in einem Punkt berühren. Das ist bei Tangenten an Funktionsgraphen nicht unbedingt der Fall, wie der Ausschnitt der Funktion zeigt. An einer anderen Stelle kann der Graph durchaus nochmal geschnitten oder berührt werden.



***Geschnitten oder berührt?**

Auch wenn in der Regel von einem Berührpunkt gesprochen wird, an dem Graph und Tangente die gleiche Steigung haben, kann der Graph der Funktion f durch seine Tangente hier durchaus auch geschnitten werden. Dies ist dann der Fall, wenn es sich bei dem Punkt um einen Wendepunkt der Funktion f handelt.



Musterbeispiel

Bestimme die Gleichung der Tangente t, die die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ im Punkt (-2|3) berührt.

Lösung

Da es sich bei Tangenten um lineare Funktionen handelt, deren Graphen Geraden ist, gilt die allgemeine Funktionsgleichung y=mx+b. Es müssen demnach die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b bestimmt werden.

- **Bestimmung der Steigung m:**
  Da $f'(x_B)=m$ gilt, kann hierfür mit Hilfe der 1. Ableitung von f(x) die Steigung des Graphen im Punkt (-2|3) bestimmt werden. 1. Ableitung: $f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$
  Steigung von f im Punkt (-2|3): $f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 1 = 3$
  $\Rightarrow$ **m = 3** $\Rightarrow$ **y=3x+b**
- **Bestimmung des y-Achsenabschnitts b:**
  Setze den bekannten Punkt der Geraden (-2|3) in die Geradengleichung ein: $3 = 3 \cdot (-2) + b$ $\Rightarrow$ **b = 9**
  $\Rightarrow$ **y=3x+9**

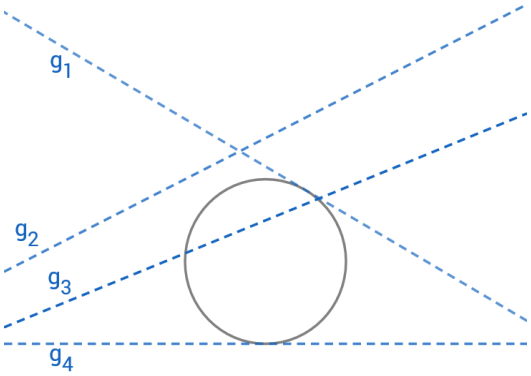
Verweis
ABL Ableitungen

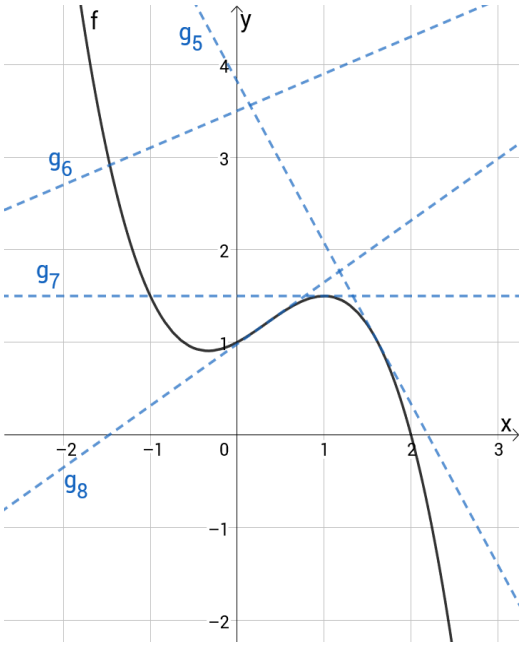
Die Gleichung der Tangente t der Funktion f im Punkt (-2|3) lautet t(x)=3x+9.

Übungsaufgaben

A1*

Entscheide, bei welchen Geraden es sich um Tangenten handelt.



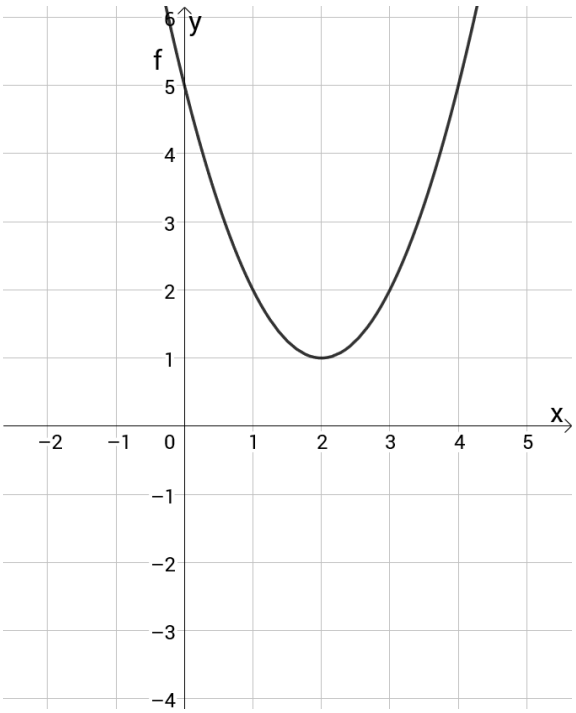


☐ g_1 ☐ g_5
☐ g_2 ☐ g_6
☐ g_3 ☐ g_7
☐ g_4 ☐ g_8

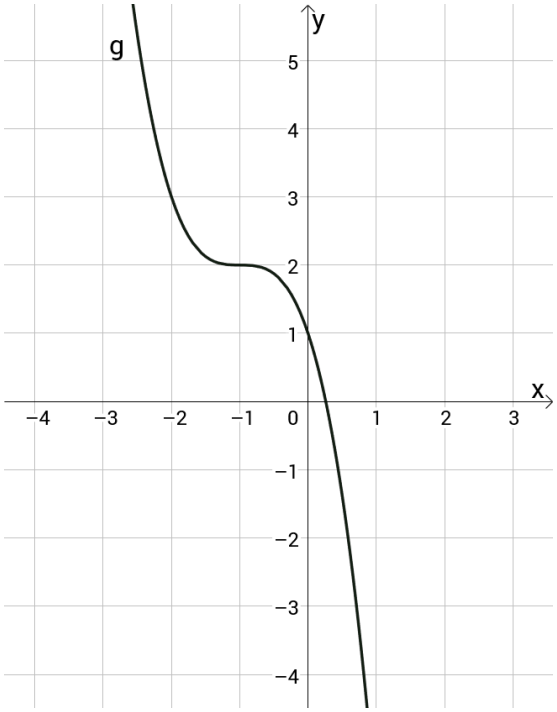
A2*

Skizziere die Tangente der abgebildeten Funktionen im jeweils angegebenen Punkt.

f(x): Punkt (3|2)



g(x): Punkt (-1|2)



A3* Bestimme die Gleichungen der Tangente zu den folgenden Funktionen im jeweils angegebenen Punkt B.

a) $f(x) = 3x^3 - x$, (1|2)
b) $f(x) = \sin x$, (0|0)
c) $f(x) = e^x$, (0|1)

Verweis
ABL Ableitungen

A4* Skizziere einen Funktionsgraphen und lege einen Punkt P fest, so dass folgendes gilt: Die Steigung in P ist 1, und der Graph verläuft oberhalb der Tangente in P.

A5* Eine Funktion f(x) hat an der Stelle x = 2 eine waagerechte Tangente, und die Funktion bildet im Intervall –1 < x < 5 eine Rechtskurve. Welche besondere Stelle ist x = 2?

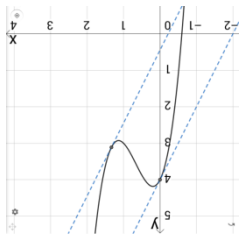
A6** Bestimme alle Punkte, bei denen die Funktion $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ Tangenten mit Steigung 2 besitzt.

A7** *„Ist die Gleichung der Tangente einer Funktion f sowie der Berührpunkt bekannt, so kann auf die Funktionsgleichung von f geschlossen werden.“* Entscheide, ob diese Aussage richtig oder falsch ist und begründe.

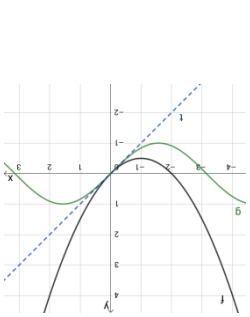
A8** Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{2}{x^2}$. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P(1 | f(1)), die Gerade x = -2 und die x-Achse umschließen ein Flächenstück. Bestimme seinen Inhalt.

Lösungen

A6 $f'(x) = 9x^2 - 12x + 2$
Da gilt, dass $m_t = f'(x)$, sind alle x gesucht, an denen $f'(x) = 2$ gilt.
$9x^2 - 12x + 2 = 2 \iff 9x^2 - 12x = 0 \implies x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$
f besitzt an den Stellen $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3}$ Tangenten mit der Steigung 2 (siehe Abb.).
Die entsprechenden Punkte sind (0|6) und $\left(1\frac{1}{3}\middle|3\frac{1}{9}\right)$



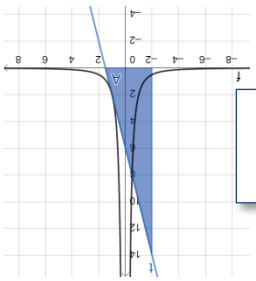
A7 Diese Aussage ist falsch. Durch den Berührpunkt und die Tangentengleichung werden lediglich Funktionswert und Steigung von f an dieser Stelle festgelegt. Der übrige Verlauf des Graphen von f kann variieren, wie folgendes Beispiel zeigt:



(Die Funktionen $f(x)=0{,}5(x+1)^2$ und $g(x)=\sin(x)$ besitzen im Punkt (0|0) beide die Tangente t(x)=x.)

A8 Bestimme zunächst die Tangentengleichung: f(1)=2 → Berührpunkt (1|2)
$f'(x) = -\frac{4}{x^3}$
$m_t = f'(1) = -4$
Setze Punkt P und m=-4 ein in y=mx+b: $2 = -4 \cdot 1 + b \implies b = 6$
Tangentengleichung: **t(x)=-4x+6**
Bestimme die Nullstelle der Tangente: 0=-4x+6 ⟹ $x_0 = 1{,}5$
Zur Bestimmung des eingeschlossenen Flächeninhalts integriere t über das Intervall [-2, 1,5]:
$\int_{-2}^{1,5} t(x)\,dx = T(1{,}5) - T(-2)$, mit $T(x) = -2x^2 + 6x$
$= -2 \cdot 1{,}5^2 + 6 \cdot 1{,}5 - (-2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2)) = 4{,}5 - (-20) = 24{,}5$
Die eingeschlossene Fläche hat einen Inhalt von **24,5 FE**.

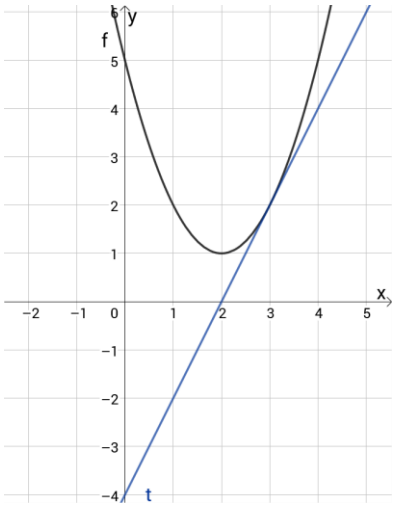
Verweis
INT Bestimmte Integrale & Flächenberechnung

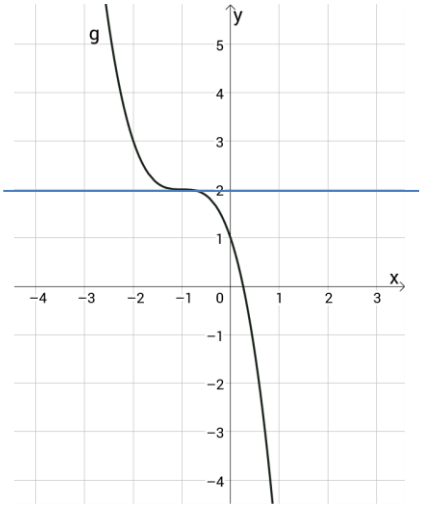


A1

Tangenten sind: g_1, g_4, g_5, g_7, g_8

A2



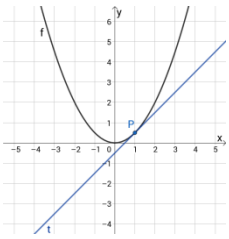


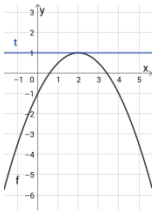
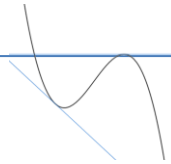
A3

a) $f'(x) = 9x^2 - 1$
$m_t = f'(1) = 9 \cdot 1^3 - 1 = 8$
Setze Punkt P und m=8 ein in y=mx+b: $2 = 8 \cdot 1 + b \implies b = -6$
Tangentengleichung: **t(x)=8x-6**

b) $f'(x) = \cos x$
$m_t = f'(0) = \cos 0 = 1$
Setze Punkt P und m=1 ein in y=mx+b: $0 = 1 \cdot 0 + b \implies b = 0$
Tangentengleichung: **t(x)=x**

c) $f'(x) = e^x$
$m_t = f'(0) = e^0 = 1$
Setze Punkt P und m=1 ein in y=mx+b: $1 = 1 \cdot 0 + b \implies b = 10$
Tangentengleichung: **t(x)=x+1**



A4 Damit der Funktionsgraph in P oberhalb der Tangente läuft, muss der Graph in P linksgekrümmt sein. Denkbar ware hier z,B, eine nach oben geöffnete Parabel Gleichzeitig muss der Graph an diesem Punkt die Steigung 1 besitzen. Dies gilt z.B. für diesen Graph ($f(x)=0{,}5x^2$) im Punkt (1|0,5):

A5 Aufgrund der waagerechten Tangente muss an der Stelle x=2 entweder ein Extrempunkt oder ein Sattelpunkt vorliegen. Da der Funktionsgraph in der näheren Umgebung dieser Stelle rechtsgekrümmt ist ("Rechtskurve", f'(x)<0), handelt es sich um einen Hochpunkt. Ein Beispiel wäre folgende Funktion: