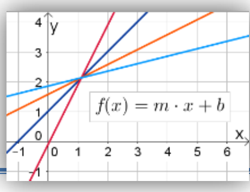
LF1 Lineare Funktionen

Thema: Graph und Funktionsgleichung



Lineare Funktionen

Lineare Funktionen verwendet man, um Zusammenhänge zu beschreiben, bei denen etwas **gleichmäßig zu- oder abnimmt**, z.B. beim **Befüllen von Wasserbecken, beim Abbrennen einer Kerze, bei Kosten für eine Taxifahrt oder einem Handytarif**.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade im Koordinatensystem. Die allgemeine Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet:

$$\boxed{f(x) = m \cdot x + b}$$

Die **Steigung m** gibt an, wie der Graph der Funktion steigt oder fällt. Der **y-Achsenabschnitt b** gibt die Stelle an, an der die Gerade die y-Achse schneidet.

Wo braucht man lineare Funktionen?

Bei Taxi- oder Stromtarifen gibt es häufig eine Grundgebühr und verbrauchsabhängige Kosten, diese Zusammenhänge kann man mit linearen Funktionen beschreiben.

Funktionsgleichung einer linearen Funktion

$f(x) = mx + b$

Mit Steigung **m** und y-Achsenabschnitt **b.**

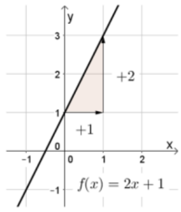
Wertetabelle einer linearen Funktion

+1 +1 +1 +1

x	-1	0	1	2	3
y	-1	1	3	5	7

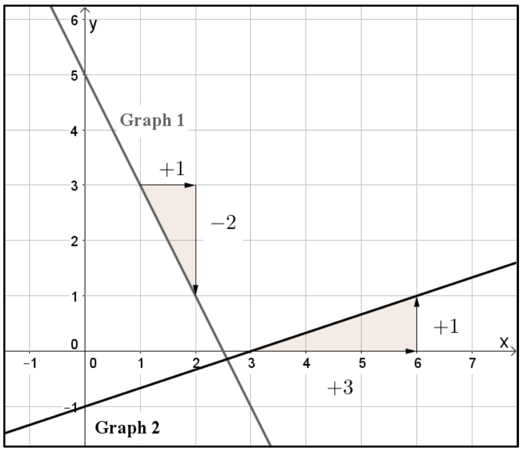
+2 +2 +2 +2

Graph einer linearen Funktion



Musterbeispiel I – Funktionsgleichung anhand eines Graphen bestimmen

Bestimme die Funktionsgleichung zu den abgebildeten Funktionsgraphen!



Lösung:

Graph 1 schneidet die y-Achse im Punkt (0/5). Also ist $b = 5$. Zur Bestimmung der Steigung m zeichnet man ein passendes Steigungsdreieck ein. Dazu kann man von einem Punkt des Graphen aus eine Einheit nach rechts gehen und muss dann zwei Einheiten nach unten. Die Steigung beträgt also $m = \frac{-2}{1} = -2$

Die Funktionsgleichung zu Graph 1 lautet $\boldsymbol{f(x) = -2x + 5}$

Graph 2

Die Steigung beträgt also $m = \frac{1}{3}$ (drei Einheiten nach rechts und eine nach oben) und $b = -1$.

Die Funktionsgleichung zu Graph 2 lautet $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{3}x - 1}$

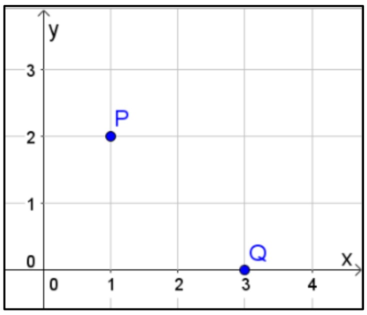
Musterbeispiel II – Funktionsgleichung aus zwei Punkten bestimmen

Gegeben sind die beiden Punkte P(1/2) und Q(3/0) und gesucht ist die Funktionsgleichung der Geraden, die durch beide Punkte verläuft! *Lösung:*

Sind zwei Punkte $P(x_1/y_1)$ und $Q(x_2/y_2)$ gegeben kann die Steigung m der Geraden wie folgt berechnet werden:

$$\boxed{\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}$$

In unserem Beispiel ergibt sich $m = \frac{0-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$



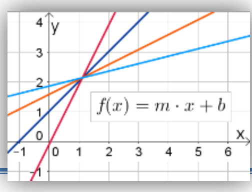
Um den y-Achsenabschnitt b zu bestimmen, kann man die Koordinaten eines gegebenen Punktes (z.B. **P(1/2)**) und den zuvor berechneten Anstieg $m = -1$ in die Funktionsgleichung $f(x) = y = mx + b$ einsetzen: Mit $m = -1$ ergibt sich zunächst $\boldsymbol{f(x) = -x + b}$

→ Koordinaten x und y von Punkt P(1/2) in $f(x)$:

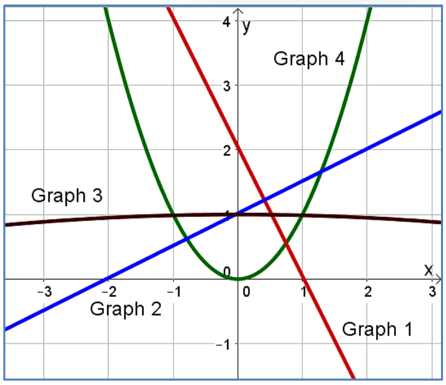
$\boldsymbol{2 = -1} + b \quad |+1$

$3 = b$

Damit ergibt sich die Funktionsgleichung $\boldsymbol{f(x) = -x + 3}$.



Übungsaufgaben



1. Welche der rechts abgebildeten Funktionsgraphen gehören zu linearen Funktionen, welche nicht?

2. Welche der folgenden Funktionsgleichungen gehören zu linearen Funktionen, welche nicht?

a. $f_1(x) = x$

b. $f_2(x) = 2x$

c. $f_3(x) = 2 + 2x$

d. $f_4(x) = 2x^2 + 2$

e. $f_5(x) = \frac{2}{x} + 2$

f. $f_6(x) = \frac{x}{2} + 2$

3. Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b der folgenden linearen Funktionen an!
Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!

a. $f_1(x) = 3x + 1$

b. $f_2(x) = 1{,}5x + 1{,}5$

c. $f_3(x) = 1 - 2x$

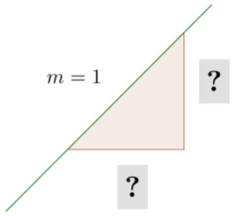
d. $f_4(x) = x + 4$

e. $f_5(x) = 4x$

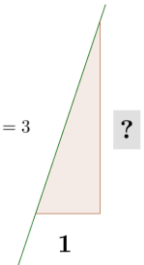
f. $f_6(x) = -\frac{1}{2}x - 5{,}6$

4. Vervollständige die Beschriftung der Steigungsdreiecke!

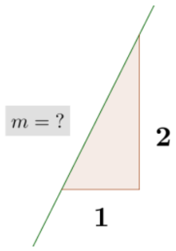
a.



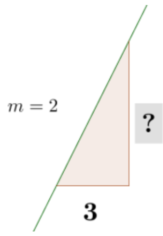
b.



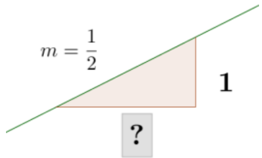
c.

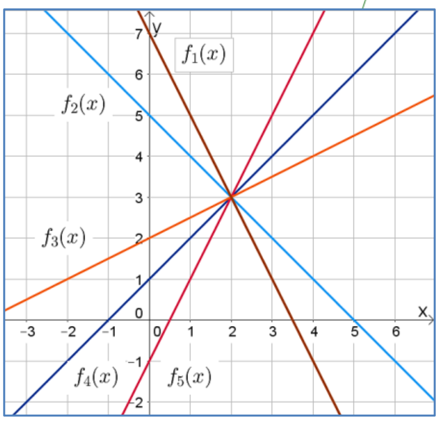


d.



e.



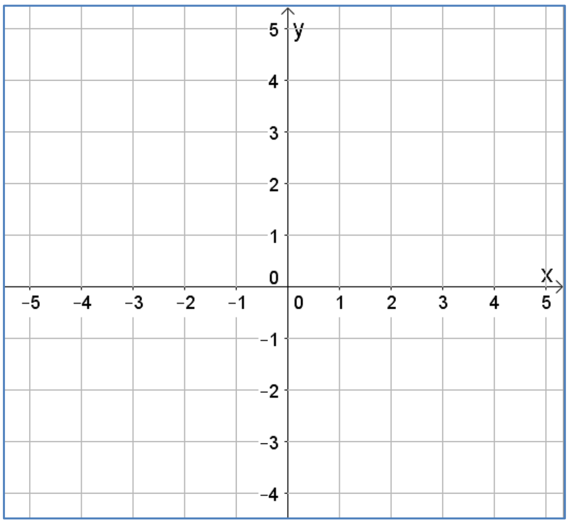


5. Bestimme die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b der abgebildeten linearen Funktionen!
Hinweis: Hier kann dir Musteraufgabe 1 helfen!

Funktion	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
Steigung m					
y-Achsen-abschnitt b					

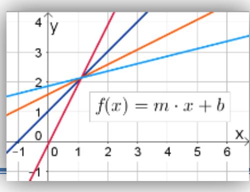
6. Gib die Funktionsgleichung der linearen Funktion an! Skizziere die Funktionsgraphen anschließend in das nebenstehende Koordinatensystem.

	Steigung m	y-Achsen-abschnitt b	Funktionsgleichung
a.	3	1	$\boldsymbol{f_1(x)} =$
b.	-2	0	$\boldsymbol{f_2(x)} =$
c.	$\frac{1}{2}$	2,5	$\boldsymbol{f_3(x)} =$
d.	1	-2	$\boldsymbol{f_4(x)} =$



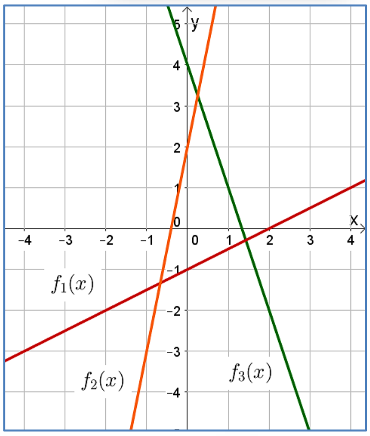
LF1 Lineare Funktionen

Thema: Graph und Funktionsgleichung



7. Gib die Funktionsgleichungen zu den rechts abgebildeten Funktionsgraphen an!

$f_1(x) =$ $\qquad$ $f_2(x) =$ $\qquad$ $f_3(x) =$



8. Bestimme anhand der gegebenen Funktionsgleichungen jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 0$. **AF1**

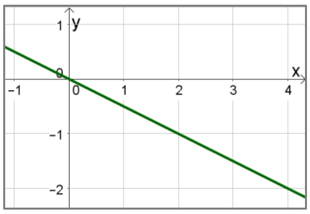
a. $f_1(x) = x + 1$ **b.** $f_2(x) = 3x$ **c.** $f_3(x) = 1000x + 9{,}6$

9. Welche Punkte A, B, C und D liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 2x + 1$?

$A(0/1)$, $B(2/2)$, $C(3/7)$, $D(0/0)$

---

10. Wer hat die Steigung m der links abgebildeten Funktion richtig bestimmt, welche Fehler haben sich bei den anderen eingeschlichen? Begründe deine Antwort kurz!



Tim	***Julia***	***Leon***	***Kathi***
$m = \frac{1}{2}$	$m = \frac{2}{-1}$	$m = \frac{-2}{4}$	$m = \frac{-1}{2}$
$\boldsymbol{m = 0{,}5}$	$\boldsymbol{m = -2}$	$\boldsymbol{m = -\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{m = -0{,}5}$

Verweis
AF1 Arbeiten mit Funktionen

11. Funktionen gesucht! Stelle anhand der gegebenen Informationen die passenden Funktionsgleichungen zu den linearen Funktionen auf. *(Tipp: Veranschaulichungen im Koordinatensystem und Musteraufgabe 2 können dir helfen!)*

Gesucht ist die Gleichung einer linearen Funktion, die ....

a. ... eine Steigung von 3 hat und deren Funktionsgraph die y-Achse im Punkt $S(0/2)$ schneidet

b. ... durch die Punkte $A(0/1)$ und $B(2/3)$ verläuft.

c. ... durch den Ursprung verläuft. Bei einem Steigungsdreieck der Funktion muss man vom Ursprung aus bei einer Einheit nach rechts genau vier Einheiten noch oben gehen.

d. ... die y-Achse bei $y = 0{,}5$ schneidet und parallel(**LF2**) zu einer Funktion mit der Steigung $m = 4$ verläuft

e. ... eine Nullstelle (**LF3**) bei $x = 2$ hat und einen negativen Anstieg von 2.

Verweis
LF2 Lage von Geraden
LF3 Nullstellen linearer Funktionen (lineare Gleichungen)

Lösungen

1. Graph 1 und Graph 2 gehören zu linearen Funktionen.

2. Folgende Funktionsgleichungen gehören zu linearen Funktionen: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x$, $f_3(x) = 2 + 2x$, $f_6(x) = \frac{x}{2} + 2$ ($f_6(x)$ kann man auch wie folgt schreiben $f_6(x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2$)

3.

	Steigung	**y-Achsenabschnitt**
a.	$m = 3$	$b = 1$
b.	$m = 1{,}5$	$b = 1{,}5$
c.	$m = -2$	$b = 1$
d.	$m = 1$	$b = 4$
e.	$m = 4$	$b = 0$
f.	$m = -\frac{1}{2}$	$b = -5{,}6$

4. Steigungsdreieck beschriften:

a. Beim ersten Dreieck kann man beispielsweise die Seiten beide mit 1 beschriften. Damit ergibt sich $m = \frac{1}{1} = 1$ (alternativ kann man auch beide Seiten mit 2, 3, ... beschriften, es muss nur immer dieselbe Zahl sein).

b. Die fehlende Seite muss mit **3** beschriftet werden, da $m = \frac{3}{1} = 3$ ist.

c. Hier berechnet sich $m = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$

d. Die fehlende Seite muss mit **6** beschriftet werden, da $m = \frac{6}{3} = 2$ ist.

e. Die fehlende Seite muss mit 2 beschriftet werden, da $m = \frac{1}{2}$ ist.

5.

Funktion	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$
Steigung m	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2
y-Achsenabschnitt b	7	5	2	1	-1

6.

	Steigung m	y-Achsenabschnitt b	Funktionsgleichung
a.	3	1	$\boldsymbol{f_1(x) = 3x + 1}$
b.	-2	0	$\boldsymbol{f_2(x) = -2x}$
c.	$\frac{1}{2}$	2,5	$\boldsymbol{f_3(x) = \frac{1}{2}x + 2{,}5}$
d.	1	-2	$\boldsymbol{f_4(x) = x - 2}$

7. $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1$ $\qquad$ $f_2(x) = 5x + 2$ $\qquad$ $f_3(x) = -3x + 4$

8. Zur Bestimmung des Funktionswertes an der Stelle $x = 0$ setzt man den Wert 0 für x in die Funktionsgleichung ein:

a. $f_1(0) = 0 + 1 = \mathbf{1}$ **b.** $f_2(0) = 3 \cdot 0 = 0$ **c.** $f_3(0) = 1000 \cdot 0 + 9{,}6 = \mathbf{9{,}6}$

9. Um zu überprüfen, welche Punkte auf dem Graphen $f(x) = 2x + 1$ liegen, setzt man die x- und y-Koordinaten der Punkte in die Funktionsgleichung ein:

***A* in *f*(*x*):** $\mathbf{1} = 2 \cdot \mathbf{0} + 1$ ergibt umgeformt $1 = 1$, also liegt A auf dem Graph
***B* in *f*(*x*):** $\mathbf{2} = 2 \cdot \mathbf{2} + 1$ ergibt umgeformt $2 \neq 5$, B liegt nicht auf dem Graph
***C* in *f*(*x*):** $\mathbf{7} = 2 \cdot \mathbf{3} + 1$ ergibt umgeformt $7 = 7$, also liegt C auf dem Graph ***D* in *f*(*x*):** $\mathbf{0} = 2 \cdot \mathbf{0} + 1$ ergibt umgeformt $0 = 1$, D liegt nicht auf dem Graph

---

10. Kathi und Leon haben die Steigung richtig bestimmt. Beide haben ein passendes Steigungsdreieck genutzt und berücksichtigt, dass der Funktionsgraph fällt (negatives Vorzeichen).

11. **a.** $f(x) = 3x + 2$ $\qquad$ **b.** $f(x) = x + 1$ (Hier hilft eine Skizze oder Musteraufgabe 2)
c. $f(x) = 4x$ $\qquad$ **d.** $f(x) = 4x + 0{,}5$
e. $f(x) = -2x + 4$ (Die Nullstelle hat die Koordinaten (2/0). Man kann beispielsweise diesen Punkt einsetzen oder sich mit einer Skizze helfen.)