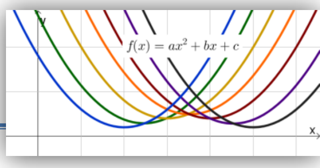
QF2 Quadratische Funktionen

Thema: Nullstellen bestimmen – Quadratische Gleichungen lösen



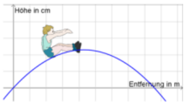
Was ist eine Nullstelle?

Kennt man den Verlauf einer Funktion (als Graph oder in Form einer Gleichung) kann eine Nullstelle beispielsweise beschreiben, dass **etwas aufhört** (z.B. ein Objekt landet nach einem Wurf/ Flug). **Nullstellen** einer Funktion sind die x-Werte für die $\boxed{f(x) = 0}$ gilt.

Das heißt an diesen Stellen **schneidet oder berührt** der Graph der Funktion die x-Achse. Als Nullstelle wird dann die **x-Koordinate dieses Schnittpunktes** angegeben, die **y-Koordinate ist immer null**. Quadratische Funktionen können eine, zwei oder keine Nullstelle haben. Um eine Nullstelle einer quadratischen Funktion zu berechnen, muss man **quadratische Gleichungen** lösen.

Was kann eine Nullstelle bedeuten?

Eine Nullstelle kann beispielsweise beschreiben, wann ein Flugobjekt landet.



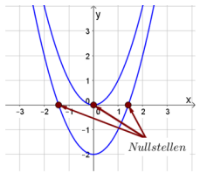
Nullstellen finden

Man findet die Nullstelle einer quadrat. Funktion, indem man die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ bzw. $f(x) = (x-d)^2 + e$ gleich null setzt und dann nach x auflöst.

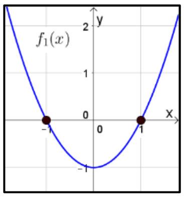
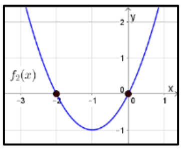
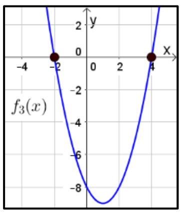
Nullstelle – Funktionswert ist null

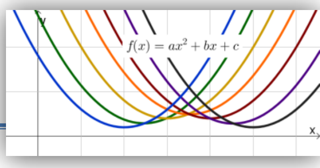
x	-1	0	1	2	3
y	-3	-2	-1	0	1

Nullstelle eines Funktionsgraphen



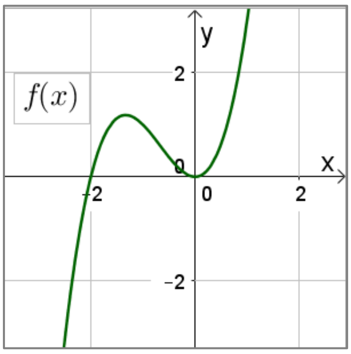
Musterbeispiele – Lösen quadratischer Gleichungen

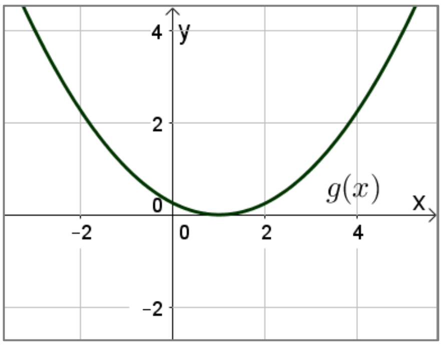
Quadratische Gleichung der Form:	Rechnerische Lösung	Graphische Lösung
$x^2 - c = 0$ a) $f_1(x) = x^2 - 1$	$x^2 - 1 = 0 \quad \vert +1$ $x^2 = 1 \quad \vert\sqrt{}$ $\mathbf{x_1 = -1}$ **und** $\mathbf{x_2 = 1}$ Lösen der quadratischen Gleichung durch **Wurzelziehen**	
$x^2 + bx = 0$ **bzw.** $x \cdot (x + b) = 0$ b) $f_2(x) = x^2 + 2x$	$x^2 + 2x = 0 \quad$ | **Ausklammern** $x \cdot (x+2) = 0$ Der linke Term wird null, wenn gilt: $x = 0$ oder $x + 2 = 0$ Damit liegen die Nullstellen bei: $\mathbf{x_1 = 0}$ **und** $\mathbf{x_2 = -2}$ Lösen der quadratischen Gleichung durch Ausklammern: SATZ VOM „NULLPRODUKT“ **Ein Produkt ist null, wenn einer der beiden Faktoren null ist.**	
$x^2 + px + q = 0$ c) $f_3(x) = x^2 - 2x - 8$	$x^2 - 2x - 8 = 0$ $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit $p = -2$ und $q = -8$ $x_{1,2} = -\frac{(-2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-8)}$ *Achtung! Beim Einsetzen muss das Vorzeichen von **p** und **q** beachtet werden!* $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8}$ $x_{1,2} = 1 \pm 3$ $\mathbf{x_1 = 4}$ **und** $\mathbf{x_2 = -2}$ Lösen der quadratischen Gleichung mit der **p, q –Formel**: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	

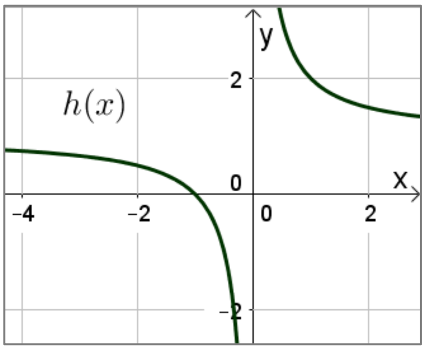


Übungsaufgaben

1. Kennzeichne die Nullstellen der abgebildeten Funktionsgraphen und gib diese näherungsweise an:







________________ ________________ ________________

2. Gib die **Anzahl der Nullstellen** folgender Funktionen **ohne Rechnung** an.

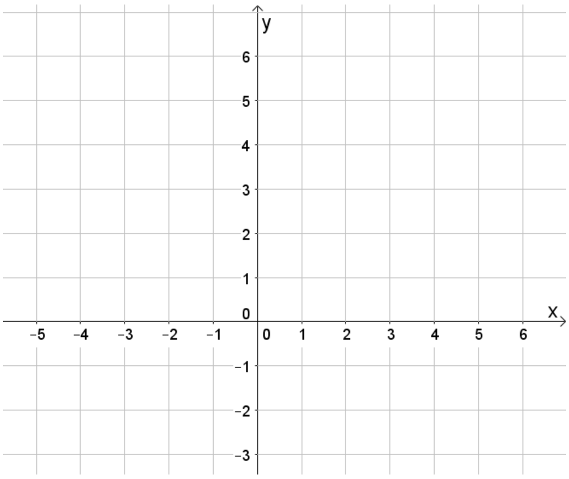
a. $f_1(x) = x + 1$
b. $f_2(x) = x^2$
c. $f_3(x) = x^2 + 1$
d. $f_4(x) = x^2 - 1$
e. $f_5(x) = (x-1)^2$
f. $f_6(x) = (x-1) \cdot x$

3. Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen.
Hinweis: Hier können dir die Musterbeispiele helfen!

a. $f_1(x) = x^2 - 9$
b. $f_2(x) = 6x^2 - 24$
c. $f_3(x) = x^2 + 4x + 3$
d. $f_4(x) = (x-1) \cdot (x+2)$
e. $f_5(x) = -(x-4)^2 + 1$
f. $f_6(x) = x^2 + 3x$
g. $f_7(x) = x^2 - 4x - 5$
h. $f_8(x) = 5x^2 - 5x$
i. $f_9(x) = x^{10} - 1$

4. Skizziere den Graphen einer **quadratischen Funktion**

a. mit einer Nullstelle bei $x = 5$
b. mit zwei Nullstellen bei $x = 1$ und $x = 2$
c. mit keiner Nullstelle.



5. Gib die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion mit

a. keiner Nullstelle an
b. einer Nullstelle bei $x = 1$ an
c. zwei Nullstellen bei $x = 1$ und $x = -1$ an.

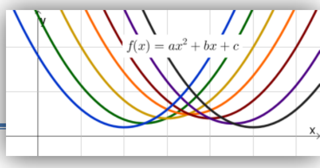
6. Überprüfe durch Einsetzen, ob für den gegebenen x-Wert eine Nullstelle vorliegt: **AF1**

a. $f_1(x) = x^2 + 2x + 1$ an der Stelle $x = -2$
b. $f_2(x) = (x-5)^2 - 1$ an der Stelle $x = 6$
c. $f_3(x) = (x-1)(x+1)$ an der Stelle $x = 1$
d. $f_4(x) = 2x^2 - 4x + 2$ an der Stelle $x = 1$

Verweise
AF1 Arbeiten mit Funktionen

7. Quadratisch?!
Löse die folgenden Gleichungen! *Hinweis: Hier können dir die Musterbeispiele helfen!*

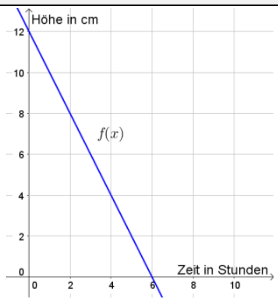
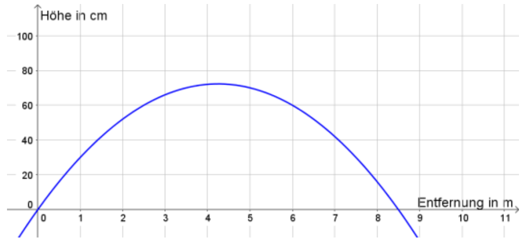
a. $x^3 = 4x$
b. $3x^3 - 12x^2 = 15x$
c. $(x-2)(x-1)x = 0$
d. $(x-3)(x+4)(x^2-25) = 0$



8. Entscheide welche Aussagen wahr oder falsch sind!
Begründe deine Entscheidung kurz!

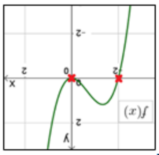
	wahr	falsch	Begründung
a. Eine Nullstelle ist der zugehörige y-Wert, wenn $x = 0$ ist.			
b. Immer wenn eine quadratische Funktion nach unten geöffnet ist, hat sie mindestens eine Nullstelle.			
c. Eine Nullstelle ist ein x-Wert, für den der zugehörige Funktionswert null ist.			
d. Hat eine quadratische Funktion genau zwei Nullstellen, ist die x-Koordinate des Scheitelpunktes der Mittelwert der beiden Nullstellen.			

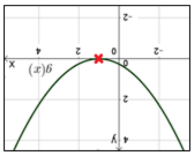
9. Gib die Nullstelle in folgenden Situationen an und erkläre kurz, was die Nullstelle in der jeweiligen Situation bedeutet.

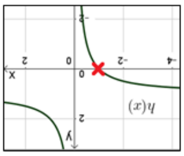
Situation A	**Situation B**
Der Graph zeigt das Abbrennen einer Kerze: 	Der Graph zeigt die Flugkurve eines Olympia-Weitspringers: 

Lösungen

1.







a. $x_1 = -2;\ x_2 = 0$ **b.** $x_1 = 1$ **c.** $x_1 = -1$

2.

a. $f_1(x) = x + 1$ eine Nullstelle
b. $f_2(x) = x^2$ eine Nullstelle
c) $f_3(x) = x^2 + 1$ keine Nullstelle
d) $f_4(x) = x^2 - 1$ zwei Nullstellen
e) $f_5(x) = (x-1)^2$ eine Nullstelle
f) $f_6(x) = (x-1)\cdot x$ zwei Nullstellen

3.

a. $f_1(x) = x^2 - 9$
Wurzelziehen:
$x_1 = -3$ und $x_2 = 3$

b. $f_2(x) = 6x^2 - 24$
Wurzelziehen:
$x_1 = 2$ und $x_2 = -2$

c. $f_3(x) = x^2 + 4x + 3$
p, q –Formel:
$x_1 = -1$ und $x_2 = -3$

d. $f_4(x) = (x-1)\cdot(x+2)$
Produkt Null, wenn Faktor Null:
$x_1 = 1$ und $x_2 = -2$

e. $f_5(x) = -(x-4)^2 + 1$
Skizze oder in Normalform und **p, q-Formel:**
$x_1 = 3$ und $x_2 = 5$

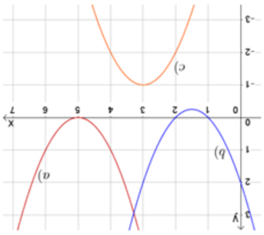
f. $f_6(x) = x^2 + 3x$
Ausklammern (Produkt Null, wenn Faktor Null):
$x_1 = 0$ und $x_2 = -3$

g. $f_7(x) = x^2 - 4x - 5$
p, q –Formel:
$x_1 = -1$ und $x_2 = 5$

h. $f_8(x) = 5x^2 - 5x$
Ausklammern (Produkt Null, wenn Faktor Null):
$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

i. $f_9(x) = x^{10} - 1$
$\Leftrightarrow x^{10} = 1$
Lösungen
$x_{1,2} = \pm 1$

4. siehe Abbildung



5.

a. zum Beispiel $f_1(x) = x^2 + 1$
b. zum Beispiel $f_2(x) = (x-1)^2$
c. zum Beispiel $f_3(x) = (x-1)(x+1)$

6.

a. $f_1(-2) = (-2)^2 + 2\cdot(-2) + 1 = 1$, also keine Nullstelle
b. $f_2(6) = (6-5)^2 - 1 = 0$, also eine Nullstelle
c. $f_3(1) = (1-1)(1+1) = 0 \cdot 2 = 0$, also eine Nullstelle
d. $f_4(1) = 2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 1 + 1 = 0$, also eine Nullstelle

7.

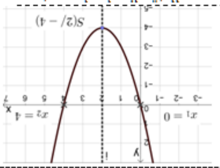
a. $x^3 = 4x \quad |-4x$
$x^3 - 4x = 0 \quad$ |Ausklammern
$x\cdot(x^2 - 4) = 0$
Erste Lösung mit Satz vom Nullprodukt $\boldsymbol{x_1 = 0}$
Betrachte Klammerterm
$x^2 - 4 = 0$
$\boldsymbol{x_2 = 2}$ **und** $\boldsymbol{x_3 = -2}$

b. $3x^3 - 12x^2 = 15x \quad |-15x$
$3x^3 - 12x^2 - 15x = 0 \quad$ |Ausklammern
$3x\cdot(x^2 - 4x - 5) = 0$
Erste Lösung mit Satz vom Nullprodukt
$\boldsymbol{x_1 = 0}$
Betrachte Klammerterm $x^2 - 4x - 5 = 0$
Mit p,q-Formel: $x_{2,3} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + 5}$
$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{9}$
$\boldsymbol{x_2 = 1}$ **und** $\boldsymbol{x_2 = 5}$

c. $(x-2)(x-1)x = 0$
Lösungen können mithilfe des Satzes vom Nullprodukt abgelesen werden:
Der erste Klammerterm wird null für $\boldsymbol{x_1 = 2}$, der zweite Klammerterm für $\boldsymbol{x_2 = 1}$. Die dritte Lösung ist $\boldsymbol{x_3 = 0}$ hierzu kann man sich den letzten Faktor auch als $(x-0)$ vorstellen.

d. $(x-3)(x+4)(x^2-25) = 0$
Vorgehen wie bei c. ergibt:
$\boldsymbol{x_1 = 3}$ und $\boldsymbol{x_2 = -4}$
Zu dem dritten Klammerterm betrachtet man die Gleichung $x^2 - 25 = 0$
Damit ergeben sich
$\boldsymbol{x_3 = 5}$ und $\boldsymbol{x_4 = -5}$

8. **a. falsch**, bei einer Nullstelle ist immer der y-Wert Null.
b. falsch, siehe zum Beispiel Lösung Aufgabe 4c).
c. wahr, Definition einer Nullstelle
d. wahr, da Parabel symmetrisch zur Gerade $x = e$ (Senkrechte durch den Scheitelpunkt), wenn der Scheitelpunkt bei $S(e/d)$ liegt (siehe Skizze).



9. **Situation A:** $\boldsymbol{x = 6}$: Nach sechs Stunden ist die Kerze vollständig abgebrannt.
Situation B: $\boldsymbol{x = 0}$ ***und*** $\boldsymbol{x = 8{,}5}$: Der Olympiaweitspringer springt 8,5 m weit. Er springt bei 0 m ab und trifft nach 8,5 m wieder auf den Boden auf.