$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

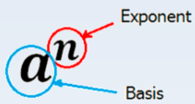
Die Rechenoperationen „Potenzieren" und „Wurzelziehen"

Das Potenzieren ist eine **abgekürzte Schreibweise für mehrfaches Multiplizieren** einer Zahl oder eines Ausdrucks mit sich selbst. Mathematisch definiert man die Potenz a^n als:

$$\boxed{\boldsymbol{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-mal\ Faktor\ a}}}$$

mit n aus den natürlichen Zahlen und a aus den reellen Zahlen.

Dabei nennt man a die **Basis** und n den **Exponent.**

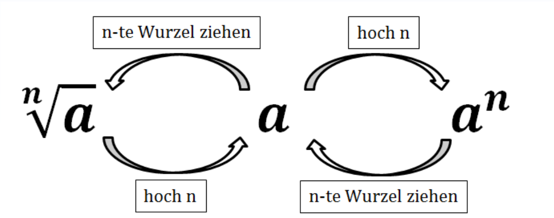


Die Potenzgesetze beschreiben Regeln zum Rechnen mit Potenzen und sind auf der rechten Seite zusammengefasst.

Die Umkehroperation zum Potenzieren ist das **Wurzelziehen.**

Es gilt zum Beispiel: $5^2 = 25$ und $\sqrt{25} = 5$

Allgemein wird das Ziehen der n-ten Wurzel durch das Potenzieren mit n rückgängig gemacht und umgekehrt. Für eine nichtnegative Zahl a gilt also:



Potenzgesetze P1-5:

Es seien a und b reelle Zahlen **ungleich *0*,** m und n sind natürliche Zahlen. Es gilt dann:

- *für Potenzen mit gleicher Basis:*

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \text{ und}$$
$$\boldsymbol{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad \textbf{(P1)}$$

- *für Potenzen mit gleichem Exponenten:*

$$\boldsymbol{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m} \text{ und}$$
$$\boldsymbol{a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m} \qquad \textbf{(P2)}$$

- *für das Potenzieren von Potenzen:*

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \qquad \textbf{(P3)}$$

Weiterhin definiert man für alle $a \neq 0$ und n aus den natürlichen Zahlen:

$$\boldsymbol{a^0 = 1} \text{ und} \qquad \textbf{(P4)}$$

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \qquad \textbf{(P5)}$$

Wurzeln lassen sich auch als Potenzen schreiben und umgekehrt, denn es gilt

$$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}} \qquad \textbf{(PW)}$$

für $a \geq 0$, m aus den ganzen Zahlen und n aus den positiven natürlichen Zahlen. Es gelten durch diese Definition alle Rechenregeln, die auch für das Rechnen mit Potenzen gelten.

Musterbeispiel

Vereinfache den folgenden Term soweit wie möglich: $a^2 \cdot a^4 + \left(\frac{a^6}{a^2}\right) - (a^2)^3 + (a \cdot b)^4$

Lösung: Wir betrachten die einzelnen Summenanden:

- $a^2 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^{2+4} = \boldsymbol{a^6}$ ***(P1)***
- $\frac{a^6}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{6-2} = \boldsymbol{a^4}$ ***(P1)***
- $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = \boldsymbol{a^6}$ ***(P3)***
- $(a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = \boldsymbol{a^4 \cdot b^4}$ ***(P2)***

Zusammengefasst vereinfacht sich der Term wie folgt:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^4 + \left(\frac{a^6}{a^2}\right) - (a^2)^3 + (a \cdot b)^4 &= \boldsymbol{a^6 + a^4 - a^6 + a^4 \cdot b^4} \\ &= a^4 + a^4 \cdot b^4 \\ &= \underline{a^4 \cdot (b^4 + 1)} \end{aligned}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Übungsaufgaben

Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass alle Variablen nur Werte ungleich Null annehmen.

1. Kreuze die richtigen Aussagen an! *Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!*

☐ $x^2 + 2x^2 = 3x^2$ ☐ $b^3 \cdot b^4 = b^7$ ☐ $\frac{a^6}{a^4} = a^2$ ☐ $\frac{1}{c^4} = -c^4$

☐ $a^2 + a^3 = a^5$ ☐ $u^3 \cdot u^3 = u^9$ ☐ $y^{-4} : y^{-4} = 1$ ☐ $(l^2)^3 = l^5$

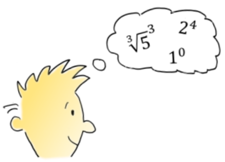
*Tipp: Nutze bei den Aufgaben **2** und **3** die Beziehung **(PW)** und bei Aufgabe **4** und **5** die Beziehung **(P5)** aus dem Infokasten!*

2. Schreibe als Potenz!
- **a.** $\sqrt{7}$
- **b.** $\sqrt[4]{10}$
- **c.** $\sqrt[6]{\left(\frac{4}{5}\right)}$
- **d.** $\sqrt{b^3}$
- **e.** $\sqrt[3]{5^4}$

3. Schreibe als Wurzel!
- **a.** $3^{\frac{1}{2}}$
- **b.** $a^{\frac{1}{6}}$
- **c.** $b^{\frac{3}{4}}$
- **d.** $5^{-\frac{3}{7}}$
- **e.** $g^{2,5}$

4. Stelle mit positivem Exponenten dar!
- **a.** x^{-2}
- **b.** $(a \cdot b)^{-4}$
- **c.** $\frac{x^{-1}}{3}$
- **d.** $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$

5. Stelle mit negativem Exponenten dar!
- **a.** $\frac{1}{x}$
- **b.** $\frac{1}{a^2}$
- **c.** $\frac{3}{b}$



6. Kopfrechnen Berechne ohne Taschenrechner!

a. 2^4 **b.** -2^4 **c.** $(-2)^4$ **d.** 2^{-4} **e.** -2^{-4}

f. $(-2)^0$ **g.** $\frac{8^7}{8^5}$ **h.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ **i.** 10^{-2} **j.** $2^4 \cdot 5^4$

7. Fasse die Terme mithilfe der Potenzgesetze zusammen! Stelle das Ergebnis mit positivem Exponenten dar!
Hinweis: Hier kann dir der Infokasten und die Musteraufgabe helfen!

a. $2^{-4} \cdot 2^5$ **b.** $\frac{48^{-1}}{16^{-1}}$ **c.** $y^4 \cdot (-z)^4$ **d.** $b^{3x} : b^x$ **e.** $a^4 \cdot a^{x+2}$

f. $(c^{-4})^3$ **g.** $4^{-1} \cdot b^{-1}$ **h.** $10x^5 \cdot (-x^3) \cdot x$ **i.** $\frac{a^8}{4a^2}$ **j.** $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b}$

8. Fasse die Wurzelterme zusammmen!
- **a.** $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$
- **b.** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$
- **c.** $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$
- **d.** $a \cdot \sqrt{a^2}$
- **e.** $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$
- **f.** $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$
- **g.** $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}$

Hinweis: Zum Vereinfachen von Wurzeltermen kann man **Wurzeln in Potenzen umschreiben** (PW) und die Potenzgesetze nutzen.

9. Wie kann man $\sqrt[3]{48}$ noch darstellen? *Hinweis: Mehrere Antworten können richtig sein!*

☐ $48^{\frac{1}{3}}$ ☐ 16 ☐ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{6}$ ☐ $4 \cdot \sqrt[3]{6}$ ☐ $2 \cdot \sqrt[3]{6}$ ☐ $\frac{1}{48^{-3}}$

10. Kreuze die zum gegebenen Term äquivalenten Terme an! Hinweis: Mehrere Antworten können richtig sein!

a. $(a^3b^{-5}c)^{-4}$	☐ $a^{-1}b^{-9}c^{-3}$	☐ $a^{-12}b^{20}c^{-4}$	☐ $\frac{1}{(a^{-3}b^5c)^4}$	☐ $\frac{b^{20}}{a^{12}c^4}$
b. $y^{(-3)^2}$	☐ y^9	☐ $\frac{1}{y^6}$	☐ y^{-9}	☐ $\frac{1}{y^9}$
c. $2x^{-2} + 2y^{-2}$	☐ $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2y^2}$	☐ $2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$	☐ $\frac{2}{x^2+y^2}$	☐ $\frac{2x^2+2y^2}{(xy)^2}$
d. $\frac{a^{-1} \cdot b^3}{a \cdot b^{-2}}$	☐ $1^{-1} \cdot b$	☐ $\frac{b^5}{a^2}$	☐ $\frac{b^2}{a^2 \cdot b^{-3}}$	☐ $\frac{(a \cdot b)^{-2}}{(a \cdot b)^{-2}}$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

11. Fülle die Kästchen aus, sodass die Gleichung stimmt!

a. $\sqrt[24]{a^{\square\cdot 3}} = \sqrt[4]{a^3}$ **b.** $3^{\square} = 27$ **c.** $3^{\square} = 9^2$

d. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\square} = \sqrt[4]{8}$ **e.** $\frac{z^{-3}}{z^{\square}} = z^4$ **f.** $7{,}34 \cdot 10^{\square} = 7340$

12. Entscheide, welche Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe deine Entscheidung kurz!	wahr	falsch	Begründung
a. Für alle $a, b \geq 0$ und n aus den natürlichen Zahlen gilt: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$			
b. Für alle $a \geq 0$ gilt: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a$			
c. Für alle $a \geq 0$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$			

13. * Vermischtes!**

a. Löse die Klammer auf und fasse zusammen: $\frac{1}{2}\left(x^2 - y^3\right)^2$

b. Setze in die Gleichung $V = \frac{s}{t}$ für $s = 10^{-1}$ und $t = \sqrt[3]{8}$ ein und berechne V.

c. Vereinfache soweit wie möglich: $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

Verweis
BIN Binomische Formeln

Lösungen

1. Kreuze die richtigen Aussagen an! *Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!*

☒ $x^2 + 2x^2 = 3x^2$ ☒ $b^3 \cdot b^4 = b^7$ ☒ $\frac{a^6}{a^4} = a^2$ ☐ $\frac{1}{c^4} = -c^4$

☐ $a^2 + a^3 = a^5$ ☐ $u^3 \cdot u^3 = u^9$ ☒ $y^{-4} : y^{-4} = 1$ ☐ $(l^2)^3 = l^5$

2.
a. $\sqrt{7} = \mathbf{7^{\frac{1}{2}}}$
b. $\sqrt[4]{10} = \mathbf{10^{\frac{1}{4}}}$
c. $\sqrt[6]{\left(\frac{4}{5}\right)} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{6}}$
d. $\sqrt{b^3} = \mathbf{b^{\frac{3}{2}}}$
e. $\sqrt[3]{5^4} = \mathbf{5^{\frac{4}{3}}}$

3.
a. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
b. $a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$
c. $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{b^3}$
d. $5^{-\frac{3}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{5^3}}$
e. $g^{2,5} = g^{\frac{5}{2}} = \sqrt{g^5}$

4.
a. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
b. $(a \cdot b)^{-4} = \frac{1}{(a \cdot b)^4}$
c. $\frac{x^{-1}}{3} = \frac{1}{3x}$
d. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2} = \frac{1}{x^{-2}} = x^2$

5.
a. $\frac{1}{x} = x^{-1}$
b. $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$
c. $\frac{3}{b} = 3b^{-1}$

6.
a. $2^4 = 16$ **b.** $-2^4 = -16$ **c.** $(-2)^4 = 16$ **d.** $2^{-4} = \frac{1}{16}$ **e.** $-2^{-4} = -\frac{1}{16}$

f. $(-2)^0 = 1$ **g.** $\frac{8^7}{8^5} = 8^2 = 64$ **h.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$ **i.** $10^{-2} = \frac{1}{100}$ **j.** $2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 100\,000$

7.
a. $2^{-4} \cdot 2^5 = 2^1 = \mathbf{2}$
b. $\frac{48^{-1}}{16^{-1}} = \left(\frac{48}{16}\right)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
c. $y^4 \cdot (-z)^4 = (-yz)^4$
d. $b^{3x} : b^x = b^{3x-x} = b^{2x}$
e. $a^4 \cdot a^{x+2} = a^{4+x+2} = a^{6+x}$
f. $(c^{-4})^3 = c^{-12} = \frac{1}{c^{12}}$
g. $4^{-1} \cdot b^{-1} = (4b)^{-1} = \frac{1}{4b}$
h. $10x^5 \cdot (-x^3) \cdot x = -10x^{5+3+1} = -10x^9$
i. $\frac{a^8}{4a^2} = \frac{1}{4} \cdot a^{8-2} = \frac{1}{4} \cdot a^6 = \frac{a^6}{4}$
j. $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b} = b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-1} = b^{\frac{1}{2}-1} = b^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}$

8. Fasse die Wurzelterme zusammmen!
a. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^2} = a$
b. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$
c. $\frac{x}{\sqrt[3]{x}} = x^1 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$
d. $a \cdot \sqrt{a^2} = a^1 \cdot a^{\frac{2}{2}} = a^{1+1} = a^2$
e. $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = \sqrt{\frac{u}{v}}$
f. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{6}+\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
g. $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}} = x^{\frac{11}{6}} = \sqrt[6]{x^{11}}$

9. Wie kann man $\sqrt[3]{48}$ noch darstellen?

☒ $48^{\frac{1}{3}}$ ☐ 16 ☒ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{6}$ ☐ $4 \cdot \sqrt[3]{6}$ ☒ $2 \cdot \sqrt[3]{6}$ ☐ $\frac{1}{48^{-3}}$

10. Kreuze die zum gegebenen Term äquivalenten Terme an!

a. $(a^3b^{-5}c)^{-4}$	☐ $a^{-1}b^{-9}c^{-3}$	☒ $a^{-12}b^{20}c^{-4}$	☐ $\frac{1}{(a^{-3}b^5c)^4}$	☒ $\frac{b^{20}}{a^{12}c^4}$
b. $y^{(-3)^2}$	☒ y^9	☐ $\frac{1}{y^6}$	☐ y^{-9}	☐ $\frac{1}{y^9}$
c. $2x^{-2} + 2y^{-2}$	☐ $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2y^2}$	☒ $2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$	☐ $\frac{2}{x^2+y^2}$	☒ $\frac{2x^2+2y^2}{(xy)^2}$
d. $\frac{a^{-1} \cdot b^3}{a \cdot b^{-2}}$	☐ $1^{-1} \cdot b$	☒ $\frac{b^5}{a^2}$	☒ $\frac{b^2}{a^2 \cdot b^{-3}}$	☐ $\frac{(a \cdot b)^{-2}}{(a \cdot b)^{-2}}$

11. Fülle die Kästchen aus, sodass die Gleichung stimmt!

a. $\sqrt[24]{a^{\mathbf{6}\cdot 3}} = \sqrt[4]{a^3}$ **b.** $3^{\mathbf{3}} = 27$ **c.** $3^{\mathbf{4}} = 9^2$

d. $\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\mathbf{3}} = \sqrt[4]{8}$ **e.** $\frac{z^{-3}}{z^{-7}} = z^4$ **f.** $7{,}34 \cdot 10^{\mathbf{3}} = 7340$

12. a. richtig - Man kann $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ in Potenzschreibweise umformen zu $(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}$ und im nächsten Schritt mit dem Potenzgesetz (P2) umformen zu $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$. Schreibt man diesen Ausdruck wiederrum in Wurzelschreibweise ergibt sich also insgesamt:

$\sqrt{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

b. falsch - Mit (P1) ergibt sich: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{6}+\frac{9}{6}} = a^{\frac{13}{6}}$

c. richtig - siehe Infokasten – Das Ziehen der n-ten Wurzel wird mit durch das Potenzieren mit n rückgängig gemacht und umgekehrt.

13.
a. $\frac{1}{2}(x^2 - y^3)^2 = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2y^3 + y^9) = \frac{1}{2}x^4 - x^2y^3 + \frac{1}{2}y^9$

b. $s = 10^{-1}$ und $t = \sqrt[3]{8}$: $V = \frac{s}{t} = \frac{10^{-1}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt[3]{8}} = \frac{1}{20}$

c. $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{6}{6}} = x^1 = x$