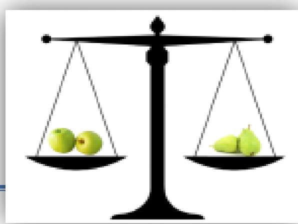


Lineare Gleichungen mit zwei Variablen und Gleichungssysteme

Bei vielen mathematischen Problemen müssen nicht nur eine Variable, sondern oft **mehrere Variablen** und Zusammenhänge berücksichtigt werden. Diese Zusammenhänge kann man in manchen Fällen mithilfe linearer Gleichungen beschreiben.

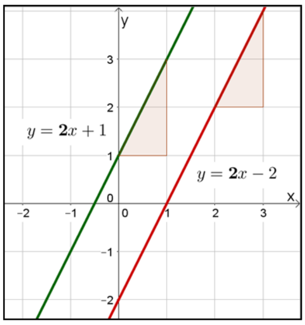
> Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen hat die allgemeine Form $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ein **lineares Gleichungssystem (kurz: LGS)** besteht aus der Verknüpfung von mindestens zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Im Folgenden werden lineare Gleichungssysteme mit genau **zwei Gleichungen und zwei Variablen** betrachtet. Man kann diese Gleichungssysteme **graphisch** oder **rechnerisch** Lösen:

- beim **graphischen Lösen** formt man die Gleichungen **durch Auflösen nach y** um und zeichnet die Geraden (**LF1**). Die Gleichung wird dabei als lineare Funktion aufgefasst. Die Lösungsmenge entspricht der Menge aller gemeinsamen Punkte der dargestellten Geraden(**LF2**):

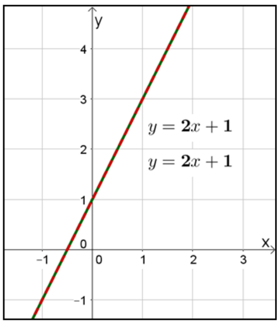
> **Verweise**
> **LF1** Graph und Gleichung linearer Funktionen
> **LF2** Lage linearer Funktionen

Beispiel 1
$I\colon\ y = 2x + 1$
$II\colon\ y = 2x - 2$



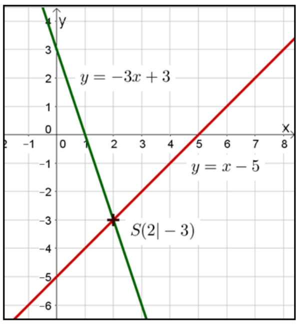
LGS hat keine Lösung, da die zugehörigen Geraden parallel verlaufen und somit keinen gemeinsamen Punkt haben.

Beispiel 2
$I\colon\ y = 2x + 1$
$II\colon\ y = 2x + 1$



LGS hat unendlich viele Lösungen, da die zugehörigen Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben.

Beispiel 3
$I\colon\ y = -3x + 3$
$II\colon\ y = x - 5$

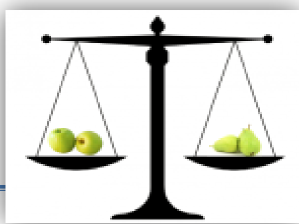


LGS hat genau eine Lösung, da sich die zugehörigen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x, y)$ lösen als Zahlenpaar das Gleichungssystem.

- beim **rechnerischen Lösen** kann man drei Verfahren nutzen:

> ⇨ **Gleichsetzungsverfahren** (dieses lässt sich als rechnerische Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden interpretieren)
> ⇨ **Einsetzungsverfahren** (hier wird eine der Variablen durch einen Term ersetzt)
> ⇨ **Additions- bzw. Subtraktionsverfahren** (hier werden die Gleichungen passend addiert oder subtrahiert, sodass eine Variable wegfällt)

Beispiele zu den rechnerischen Lösungsverfahren finden sich auf der nächsten Seite.



Musterbeispiele – Rechnerische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Allgemein dürfen folgende Äquivalenzumformungen am Gleichungssystem durchgeführt werden, da sie die Lösungsmenge nicht verändern:

- ⇨ Reihenfolge der Gleichungen im Gleichungssystem darf verändert werden (z. B.: $\mathrm{I} \to \mathrm{II}, \mathrm{II} \to \mathrm{I}$)
- ⇨ die Gleichungen dürfen mit Zahlen ungleich Null multipliziert und dividiert werden
- ⇨ zu einer Gleichung kann ein Vielfaches einer anderen Gleichung addiert oder subtrahiert werden (→Additionsverfahren)

Gleichsetzungsverfahren	Einsetzungsverfahren	Additionsverfahren
Vorgehen: Beide Gleichungen werden nach einer Variablen aufgelöst. Die so erhaltenen Terme werden gleichgesetzt.	**Vorgehen:** Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst. Den so entstandenen Term setzt man in die <u>andere</u> Gleichung ein.	**Vorgehen:** Beide Gleichungen sollten in Normalform $a \cdot x + b \cdot y = c$ gegeben sein bzw. umgeformt werden. Die Gleichungen werden dann so multipliziert oder dividiert, dass die Koeffizienten einer Variablen den gleichen Wert, aber unterschiedliche Vorzeichen haben. Durch Addition der beiden Gleichungen fällt bei einer der Gleichungen eine Variable weg. Oder man löst mittels des Subtraktionsverfahrens bei gleichen Koeffizienten.

Gleichsetzungsverfahren

Beispiel:

I. $y + x = 3$

II. $4y - 2x = 6$*

Gleichungen nach x auflösen

I.' $x = 3 - y$

II.' $x = 2y - 3$

Terme auf der rechten Seite gleichsetzen

$\to 3 - y = 2y - 3$

$-3y = -6$

$\boldsymbol{y = 2}$

Errechneten y-Wert in eine geeignete von den beiden Gleichung einsetzen.

Setze $y = 2$ in I.':

$x = 3 - 2$

$\boldsymbol{x = 1}$

Lösungsmenge: $\boldsymbol{L} = \{(\mathbf{1}|\mathbf{2})\}$

---

*detaillierte Nebenrechnung zum Umstellen der Gleichung II. nach x:

$4y - 2x = 6 \quad |-4y$

$-2x = 6 - 4y \quad |:(-2)$

$x = -3 + 2y = \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{3}$

Einsetzungsverfahren

Beispiel:

I. $y + x = 2$

II. $4y + 4x = 6$

Gleichungen I nach x auflösen

I.' $x = 2 - y$

II. $4y + 4x = 6$

Term $(2 - y)$ in II:

Term auf der rechten Seite von I' in Gleichung II einsetzen (für die Variable x).

$4y + 4\boldsymbol{x} = 6$

$4y + 4(2 - y) = 6$

$4y + 8 - 4y = 6$

$\mathbf{8 \neq 6}$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung!

Anmerkung: *Ergibt sich beim rechnerischen Lösen eines Gleichungssystems eine wahre Aussage der Form* $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$ *mit* $n \in \mathbb{R}$, *z.B.:* $3 = 3$, *hat das zugehörige Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Ergibt sich eine falsche Aussage der Form* $\boldsymbol{m} \neq \boldsymbol{n}$ *mit* $m, n \in \mathbb{R}$ *wie im Beispiel oben, hat das Gleichungssystem keine Lösung.*

Additionsverfahren

Beispiel:

I. $2x + 3y = 1$

II. $4x + 4y = 2$

Gleichungen sind in Normalform gegeben

Die erste Gleichung wird nun mit (-2) multipliziert und mit der zweiten Gleichung addiert:

I. $2x + 3y = 1 \quad |\cdot(-2)$

II. $4x + 4y = 2$

I.' $-4x - 6y = -2$

$II.$ $4x + 4y = 2$

I.'+II.

I.' $-4x - 6y = -2$

I.'+ II. $-2y = 0$

Durch die Addition enthält eine Gleichung nur noch eine Variable.

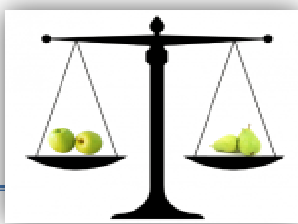
Damit ergibt sich direkt $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$.

Setze $y = 0$ in I.:

$2x + 3 \cdot 0 = 1$

$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Lösungsmenge: $\boldsymbol{L} = \left\{\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\middle|\mathbf{0}\right)\right\}$



LGS Lineare Gleichungssysteme

Thema: Lineare Gleichungssysteme lösen

Übungsaufgaben

1. Welche der Gleichungen ist eine lineare Gleichung? Kreuze an!

☐ $3x + 1 = y$ ☐ $x^2 + x = 1$ ☐ $x = \frac{6}{7} + 2y$

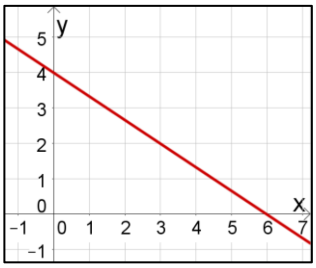
☐ $7z = \frac{5}{x}$ ☐ $8y = \frac{x}{4}$ ☐ $x^3 + \sqrt{x} = 3$

2. Gib für die Gleichungen jeweils zwei Zahlenpaare an, die die Gleichung erfüllen (mit $a, b, d, f, u, v, x, y \in \mathbb{R}$)!

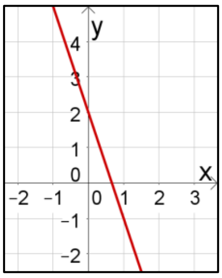
a. $a + b = 11$ **b.** $y = 2x + 1$

c. $12 - u = 2v$ **d.** $d + 1 = f - 2$

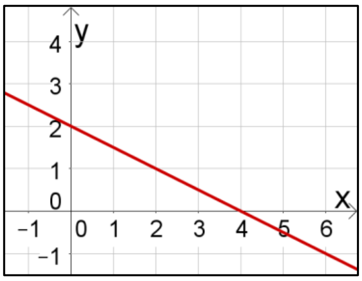
3. Welche der abgebildeten Geraden entspricht der Gleichung $\mathbf{6x + 2y = 4}$?
Wähle aus und begründe!



A



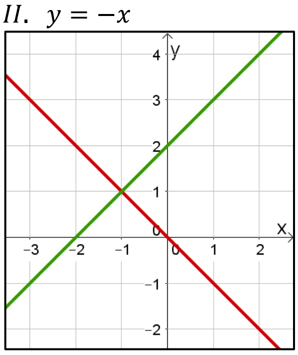
B



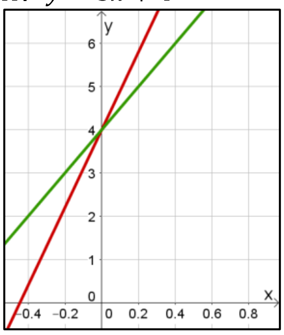
C

4. Im Folgenden wurden Gleichungssysteme graphisch gelöst. Lies die Lösung aus den graphischen Darstellungen ab!

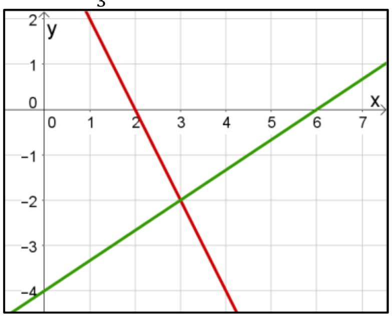
$I.\ \ y = x + 2$
$II.\ \ y = -x$



$I.\ \ y = 9x + 4$
$II.\ \ y = 5x + 4$



$I.\ \ y = -2x + 4$
$II.\ \ y = \frac{2}{3}x - 4$



5. Entscheide, ob das angegebene Zahlenpaar $(x|y)$ eine Lösung für das Gleichungssystem ist.

a. $I.\ \ 2x + y = 10$
$II.\ x - y = 2$
$\boldsymbol{L} = \{(\mathbf{4}|\mathbf{2})\}$?

b. $I.\ \ 3x + 6 = y$
$II.\ \ -y = x + 2$
$\boldsymbol{L} = \{(\mathbf{-1}|\mathbf{1})\}$

c. $I.\ \ \frac{1}{2}x - y = 5$
$II.\ x + y = 25$
$\boldsymbol{L} = \{(\mathbf{20}|\mathbf{5})\}$

6. Entscheide ohne Rechung, ob das angegebene Gleichungssystem **genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen** hat! Begründe deine Antwort kurz! *Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen*!

$I.\ \ y = 2x + 2$

$II.\ \ y = x + 1$

☐ eine Lösung,
☐ keine Lösung,
☐ unendlich viele Lösungen,
weil: ______________________
____
____
____

$I.\ \ y = 7x - 1$

$II.\ \ y = 7x + 1$

☐ eine Lösung,
☐ keine Lösung,
☐ unendlich viele Lösungen,
weil: ______________________
____
____
____

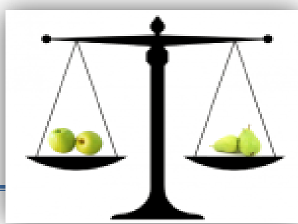
$I.\ \ y = \frac{4}{6}x$

$II.\ \ y = \frac{2}{3}x$

☐ eine Lösung,
☐ keine Lösung,
☐ unendlich viele Lösungen,
weil: ______________________
____
____

LGS Lineare Gleichungssysteme

Thema: Lineare Gleichungssysteme lösen



7. Löse das lineare Gleichungssystem mit einer geeigneten Methode!
Hinweis: Hier können dir die Musteraufgaben helfen!

a. $I.\ \ y = 2x + 11$
$II.\ \ y = 3x - 15$

b. $I.\ \ -9y + x = 4$
$II.\ \ 5y - 4 = x$

c. $I.\ \ x = 2 - 5y$
$II.\ \ 10x - 10y = 0$

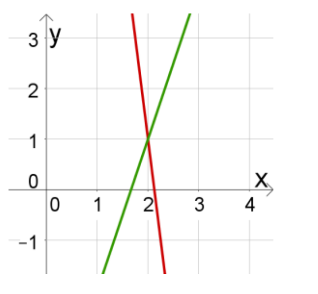
d. $I.\ \ x - 4y = 6$
$II.\ -2x - 4y = 6$

e. $I.\ \ 2x + 3y = 6$
$II.\ \ 3y = -2x + 5$

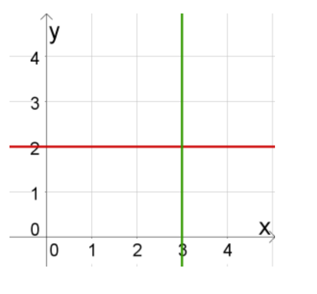
f. $I.\ \ x + y = 1$
$II.\ \ y = 2x + 4$

8. Welche graphische Lösung gehört zu welchem Gleichungssystem? Ordne zu!

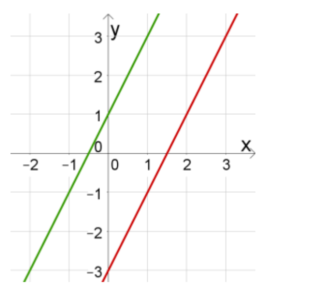
A



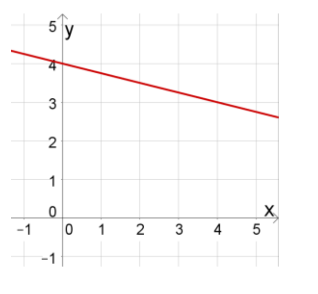
B



C



D



(1) $I.\ \ y = -\frac{1}{4}x + 4$ $II.\ \ 0{,}5x + 2y = 8$	**(2)** $I.\ \ 14x - 7y = 21$ $II.\ -28x + 14y = 14$	**(3)** $I.\ \ 3x - y = 5$ $II.\ \ y - 17 = -8x$	**(4)** $I.\ \ 3y = 6$ $II.\ \ 2x = 6$

9. Vermischtes!

a. Gib ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen an!

b. Gib ein unlösbares Gleichungssystem an!

c. Löse das Gleichungssystem graphisch und rechnerisch: $I.\ 12x - 4y = 16$
$II.\ 15x - 5y = 10$

10. Stelle ein Gleichungssystem auf, das den Sachverhalt beschreibt und löse es! Was bedeuten die Variablen?

a. Die Summe zweier Zahlen beträgt 80. Die Differenz beider Zahlen beträgt 4.

b. In einem Käfig befinden sich 35 Hühner und Schweine. Insgesamt haben sie 94 Beine.

c. Tim ist vier Jahre älter als sein Bruder Lars. Zusammen sind sie 30 Jahre alt.

Lösungen

1.

☒ $3x + 1 = y$ ☐ $x^2 + x = 1$ ☒ $x = \frac{6}{7} + 2y$

☒ $7z = \frac{5}{x}$ ☒ $8y = \frac{x}{4}$ ☐ $x^3 + \sqrt{x} = 3$

2. Gib für die Gleichungen jeweils zwei Zahlenpaare an, die die Gleichung erfüllen!

a. z.B.: $a = 5$ und $b = 6$ oder $a = 4$ und $b = 7$

b. z.B.: $x = 1$ und $y = 3$ oder $x = -2$ und $y = -3$

c. z.B.: $u = 6$ und $v = 3$ oder $u = 1$ und $v = \frac{11}{2}$

d. z.B.: $d = 1$ und $f = 4$ oder $d = -1$ und $f = 2$

3. Graph B passt zur angegebenen Gleichung, da man die Gleichung zunächst nach y umstellen kann und erhält: $y = -3x + 2$. Der Graph B hat eine Steigung von $m = -3$ und einen y-Achsenabschnitt von $b = 2$, was zur umgestellten Gleichung passt.

4. Man erhält die Lösungen durch das Ablesen der Schnittpunkte!
Bild 1: Schnittpunkt $S(-1|1) \rightarrow$ **$x = -1$ und $y = 1$**
Bild 2 Schnittpunkt $S(0|4) \rightarrow$ **$x = 0$ und $y = 4$**
Bild 3 Schnittpunkt $S(3|-2) \rightarrow$ **$x = 3$ und $y = -2$**

5. Entscheide, ob das angegebene Zahlenpaar (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems ist!

a. Setze $x = 4$ und $y = 2$ in die Gleichungen:
$I.\ 2 \cdot 4 + 2 = 10$
$10 = 10$ ✓
$II.\ 4 - 2 = 2$
$2 = 2$ ✓
Das Zahlenpaar $(4|2)$ ist eine Lösung des LGS.

b. Setze $x = -1$ und $y = 1$ in die Gleichungen:
$I.\ 3 \cdot (-1) + 6 = 1$
$3 \neq 1$ ×
Das Zahlenpaar $(-1|1)$ ist keine Lösung des LGS.

c. Setze $x = 20$ und $y = 5$ in die Gleichungen:
$I.\ \frac{1}{2} \cdot 20 - 5 = 5$
$5 = 5$ ✓
$II.\ 20 + 5 = 25$
$25 = 25$ ✓
Das Zahlenpaar $(20|5)$ ist eine Lösung des LGS.

6.

$I.\ \ y = 2x + 2$
$II.\ \ y = x + 1$

☒ eine Lösung,
☐ keine Lösung,
☐ unendlich viele Lösungen,
weil: *die Geraden unterschiedliche Steigungen und unterschiedliche y-Achsenabschnitte haben. Dadurch schneiden sie sich in genau einem Punkt.*

$I.\ \ y = 7x - 1$
$II.\ \ y = 7x + 1$

☐ eine Lösung,
☒ keine Lösung,
☐ unendlich viele Lösungen,
weil: *die Geraden haben dieselbe Steigung aber unterschiedliche y-Achsenabschnitte. Sie verlaufen somit parallel und haben somit keinen Punkt gemeinsam.*

$I.\ \ y = \frac{4}{6}x$
$II.\ \ y = \frac{2}{3}x$

☐ eine Lösung,
☐ keine Lösung,
☒ unendlich viele Lösungen,
weil: *die Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben. Die Steigung und der y-Achsenabschnitt der Geraden stimmen überein.*

7.

a. $I.\ \ y = 2x + 11$
$II.\ \ y = 3x - 15$
Hier eignet sich das Gleichsetzungsverfahren:
$2x + 11 = 3x - 15 \quad | -3x \quad | -11$
$-x = -26$
$\boldsymbol{x = 26}$
Einsetzen in I.: $y = 2 \cdot 26 + 11 \rightarrow \boldsymbol{y = 63}$

b. $I.\ \ -9y + x = 4$
$II.\ \ 5y - 4 = x$
Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
Für x: Term $(5y - 4)$ in Gleichung I einsetzen:
$-9y + (5y - 4) = 4 \quad | +4$
$-4y = 8 \quad |:(-4)$
$\boldsymbol{y = -2}$
Einsetzen in II.: $5 \cdot (-2) - 4 = x \rightarrow \boldsymbol{x = -14}$

c. $I.\ \ x = 2 - 5y$
$II.\ \ 10x - 10y = 0$
Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
Für x: Term $(2 - 5y)$ in Gleichung II einsetzen:
$10(2 - 5y) - 10y = 0$
$20 - 50y - 10y = 0 \quad | -20$
$-60y = -20 \quad |:(-60)$
$\boldsymbol{y = \frac{1}{3}}$
Einsetzen in I: $x = 2 - 5 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$

d. $I.\ \ x - 4y = 6$
$II.\ -2x - 4y = 6$
Hier eignet sich das Subtraktionssverfahren:
Man kann beispielsweise I-II rechnen, um in einer Gleichung den Term $(-4y)$ zu eliminieren:
$I.\ \ x - 4y = 6$
$I - II.:\ \ 3x = 0 \quad \rightarrow x = 0$
Einsetzen in I: $0 - 4y = 6 \rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{3}{2}}$

e. $I.\ \ 2x + 3y = 6$
$II.\ \ 3y = -2x + 5$
Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
Für $3y$: Term $(-2x + 5)$ in Gleichung I einsetzen:
$2x + (-2x + 5) = 6$
$5 \neq 6$ **Das LGS hat keine Lösung!**

f. $I.\ \ x + y = 1$
$II.\ \ y = 2x + 4$
Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren oder Gleichsetzungsverfahren:
Gleichung I nach y umstellen: $I'.\ y = 1 - x$
Gleichsetzen:
$1 - x = 2x + 4$
$x = -1$ und durch Einsetzen in I'. folgt: $y = 2$

8. Die Zuordnungen lauten: **A-3, B-4, C-2, D-1.** Man erhält die Lösungen, indem man die gegebenen Gleichungen nach y umstellt.

9.

a. Beispiel für ein LGS:
$I.\ \ y = 2x + 1$
$II.\ \ y = 2x + 1$
Graphisch betrachtet wären die Geraden identisch.

b. Beispiel für ein LGS:
$I.\ \ y = 2x + 2$
$II.\ \ y = 2x + 4$
Graphisch betrachtet wären die Geraden parallel.

c. LGS umgestellt nach y und dividiert durch 4 (Gleichung I) und 5 (Gleichung II):
$I'.\ \ y = 3x + 4$
$II'.\ \ y = 3x + 2$
Die beiden Geraden liegen parallel. Das LGS hat keine Lösung. Rechnerisch ergibt sich:
$I' = II' \rightarrow 4 \neq 2$

10.

a. $I.\ \ x + y = 80$
$II.\ x - y = 4$
Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren:
...
$x = 42$ und **$y = 38$**
x, y sind die gesuchten Zahlen, die die Bedingungen erfüllen

b. $I.\ \ x + y = 35$
$II.\ 2x + 4y = 94$
Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren:
...
$x = 23$ und **$y = 12$**
x ist die Zahl der Hühner
y ist die Zahl der Schweine

c. $I.\ \ L = T + 4$
$II.\ T + L = 30$
Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren:
...
$T = 17$ und **$L = 13$**
T steht für Tims Alter
L steht für Lars Alter