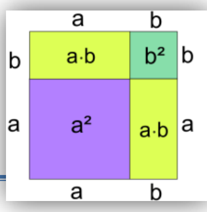


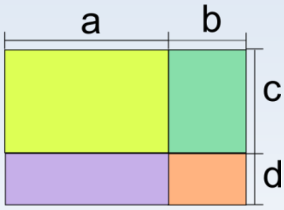
Binomische Formeln

Die binomischen Formeln stellen eine „Abkürzung“ für das Rechnen mit *zweigliedrigen Termen* (=Binome) dar. Binome treten häufig beim **Lösen von quadratischen Gleichungen** auf oder auch in der **Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion**.

Mathematisch beschreiben die binomischen Formeln Spezialfälle für **Produkte von Summen** („jeder Summand wird mit jedem multipliziert“) beziehungsweise umgekehrt auch die **Summen von Produkten**.

$(a+b)\cdot(c+d)=$

$a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$



<u>Die drei binomischen Formeln:</u>

1. binomische Formel:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$$

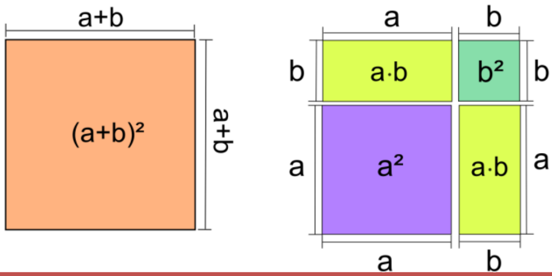
2. binomische Formel:

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2$$

3. binomische Formel:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

Graphische Herleitung der 1. binomischen Formel:



Musterbeispiel

Binomische Formeln – „vorwärts"

Löse die Klammer auf und schreibe den Term mithilfe der binomischen Formel als Summe bzw. Differenz!

a. $(x+3y)^2$ **b.** $(z-y)(z-y)$ **c.** $(3k+4)(3k-4)$

Lösung:

a. $\left(\underbrace{x}_{a}+\underbrace{3y}_{b}\right)^2=\underbrace{x^2}_{a^2}+\underbrace{2\cdot 3xy}_{2ab}+\underbrace{(3y)^2}_{b^2}=\boldsymbol{x^2+6xy+9y^2}$ *(1. binomische Formel)*

b. $(z-y)(z-y)=(z-y)^2=\boldsymbol{z^2-2zy+y^2}$ *(2. binomische Formel)*

c. $(3k+4)(3k-4)=(3k)^2-(4)^2=\boldsymbol{9k^2-16}$ *(3. binomische Formel)*

Binomische Formeln – „rückwärts"

Schreibe den Term mithilfe der binomischen Formeln als Produkt!

a. $4u^2+12u+9$ **b.** $9-6x+x^2$ **c.** $36y^2-144$

Lösung:

a. $\underbrace{4u^2}_{a^2}+\underbrace{12u}_{2ab}+\underbrace{9}_{b^2}=\left(\underbrace{\boldsymbol{2u}}_{a}+\underbrace{\boldsymbol{3}}_{b}\right)^2$ *(1. binomische Formel)*

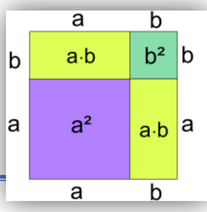
b. $\underbrace{9}_{a^2}-\underbrace{6x}_{2ab}+\underbrace{x^2}_{b^2}=\left(\underbrace{\boldsymbol{3}}_{a}-\underbrace{\boldsymbol{2x}}_{b}\right)^2$ *(2. binomische Formel)*

c. $\underbrace{36y^2}_{a^2}-\underbrace{144}_{b^2}=(\underbrace{\boldsymbol{6y}}_{a}+\underbrace{\boldsymbol{12}}_{b})(\underbrace{\boldsymbol{6y}}_{a}-\underbrace{\boldsymbol{12}}_{b})$ *(3. binomische Formel)*

*Das Überführen einer Summe in ein Produkt nennt man **Faktorisieren.** Faktorisieren kann beispielsweise bei der **Nullstellen-berechnung** von Funktionen helfen.*

BIN Rechengesetze

Thema: Binomische Formeln



Übungsaufgaben

1. Bei welchen Termen kann man die binomischen Formeln zum Auflösen der Klammer anwenden?
Entscheide zuerst und löse dann die Klammer mithilfe der binomischen Formeln auf!
Hinweis: Hier kann dir der Infokasten und die Musteraufgabe helfen!

a. $(b-c)^2$ **d.** $(3+4k)$ **g.** $(7-g)(g+7)$ **j.** $(3-z)^5$

b. $7-(u+1)$ **e.** $(a+b)(c-d)$ **h.** $(4p+p)^2$ **k.** $(l-4m)^2$

c. $(5+f)^2+1$ **f.** $2\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$ **i.** $(i^2-3)^2$ **l.** $(u-5)(u-5)$

2. Faktorisiere die gegebenen Terme mithilfe der binomischen Formeln!
Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe helfen!

a. a^2-2a+1 **c.** $x^2+2x\cdot 6+36$ **e.** $25+10p+p^2$ **g.** m^2-n^2

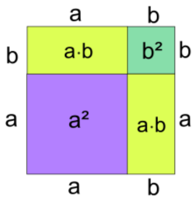
b. $1-9b^2$ **d.** $h^2-2ht+t^2$ **f.** $\frac{1}{4}a^2-ab+b^2$ **h.** $w^2+w-121-w$

3. Fülle die Lücken!

a. $a^2+12a+\square=(a+6)^2$
b. $36s^2-\square+64=(\square-\square)^2$
c. $x^2+6xy+\square=(x+\square)^2$
d. $\square+10k+\square=(\square+k)^2$
e. $\square-10ab+\square=(2{,}5a-\square)^2$

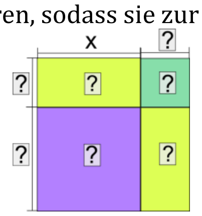
4. Die Umformung unten wurde von einem Schüler durchgeführt. Erkläre anhand der Abbildung rechts, warum die Umformung im Allgemeinen falsch ist.

$$(a+b)^2=a^2+b^2\ ???$$

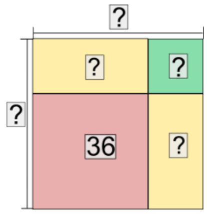


5. Figuren Beschrifte die Figuren, sodass sie zur angebenen Rechung passen!

a. $(x+4)^2=x^2+8x+16$



b. $(6+b)^2=36+12b+b^2$



6. Rechentricks
Binomische Formeln helfen als Zerlegung bei der Berechung von Produkten und Quadratzahlen im Kopf!
So kann man beispielsweise 23^2 mit der Zerlegung $(20+3)^2=400+2\cdot 20\cdot 3+9=\mathbf{529}$ im Kopf berechnen.

a. Berechne 26^2, 54^2 und 19^2 mit dieser Methode.

b. Auch folgende Ausdrücke lassen sich mithilfe der binomischen Formel schnell im Kopf berechnen:
$29\cdot 31=?$ $38\cdot 42=?$ $99\cdot 101=?$ Findest du den Trick?

Lösungen

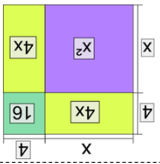
1.
a. $(b-c)^2=\mathbf{b^2-2bc+c^2}$
b. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
c. $(5+f)^2+1=25+10f+f^2+1=\mathbf{26+10f+f^2}$
d. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
e. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
f. $2\left(\frac{x}{2}-2\right)^2=2\left(\frac{1}{4}\cdot x^2-2\cdot 2\cdot\frac{x}{2}+4\right)=2\left(\frac{1}{4}\cdot x^2-2x+4\right)=\frac{1}{2}\mathbf{x^2-4x+8}$
g. $(7-g)(g+7)=\mathbf{7^2-g^2}$ (3. binomische Formel)
h. Anwendung der bin. Formel nicht sinnvoll (Hier kann man zwar eine binomische Formel anwenden, die Berechnung wird dadurch jedoch nicht einfacher. Zeitsparender ist es hier, den Ausdruck in der Klammer einfach zusammenzufassen und dann zu quadrieren.)
i. $(i^2-3)^2=i^4-2\cdot 3\cdot i^2+9=\mathbf{i^4-6i^2+9}$
j. Anwendung der bin. Formeln nicht direkt möglich, der Ausdruck lässt sich jedoch zerlegen in $(3-z)^2\cdot(3-z)^2\cdot(3-z)$ und hier kann man die bin. Formeln anwenden
k. $(l-4m)^2=\mathbf{l^2-8lm+16m^2}$
l. $(u-5)(u-5)=(u-5)^2=\mathbf{u^2-10u+25}$

2.
a. $a^2-2a+1=(a-1)^2$
b. $1-9b^2=(1-3b)(1+3b)$
c. $x^2+2x\cdot 6+36=(x+6)^2$
d. $h^2-2ht+t^2=(h-t)^2$
e. $25+10p+p^2=(5+p)^2$
f. $\frac{1}{4}a^2-ab+b^2=\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2$
g. $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$
h. $w^2+w-121-w=w^2-121=(w+11)(w-11)$

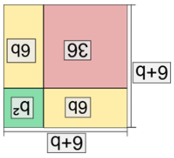
3.
a. $a^2+12a+\square=(a+6)^2\rightarrow a^2+12a+\mathbf{36}=(a+6)^2$
b. $36s^2-\square+64=(\square-\square)^2\rightarrow 36s^2-\mathbf{80s}+64=(\mathbf{6s}-\mathbf{8})^2$
c. $x^2+6xy+\square=(x+\square)^2\rightarrow x^2+6xy+\mathbf{9y^2}=(x+\mathbf{3y})^2$
d. $\square+10k+\square=(\square+k)^2\rightarrow\mathbf{25}+10k+\mathbf{k^2}=(\mathbf{5}+k)^2$
e. $\square-10ab+\square=(2{,}5a-\square)^2\rightarrow\mathbf{6{,}25a^2}-10ab+\mathbf{4b^2}=(2{,}5a-\mathbf{2b})^2$

4. Bei der Umformung wurde der mittlere Summand der ersten binomischen Formel vergessen: $a^2+2ab+b^2$ In der Abbildung würden bei der Umformung $(a+b)^2=a^2+b^2$ die beiden Rechtecke mit ab fehlen.

5. **a.**



b.



6.
a. $26^2=(20+6)^2=400+2\cdot 6\cdot 20+36=\mathbf{676}$
$54^2=(50+4)^2=2500+2\cdot 4\cdot 50+16=\mathbf{2916}$
$19^2=(20-1)^2=400-2\cdot 1\cdot 20+1=\mathbf{361}$
b. $29\cdot 31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=\mathbf{899}\rightarrow$ **Trick 3. bin. Formel**
$38\cdot 42=(40-2)(40+2)=40^2-2^2=1600-4=\mathbf{1596}$
$99\cdot 101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=10000-1=\mathbf{9999}$