

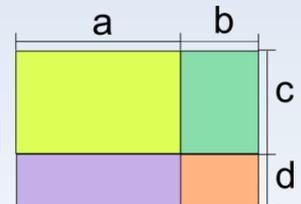
Binomische Formeln

Die binomischen Formeln stellen eine „Abkürzung“ für das Rechnen mit *zweigliedrigen Termen* (=Binome) dar. Binome treten häufig beim **Lösen von quadratischen Gleichungen** auf oder auch in der **Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion**.

Mathematisch beschreiben die binomischen Formeln Spezialfälle für **Produkte von Summen** („jeder Summand wird mit jedem multipliziert“) beziehungsweise umgekehrt auch die **Summen von Produkten**.

$$(a+b) \cdot (c+d) =$$

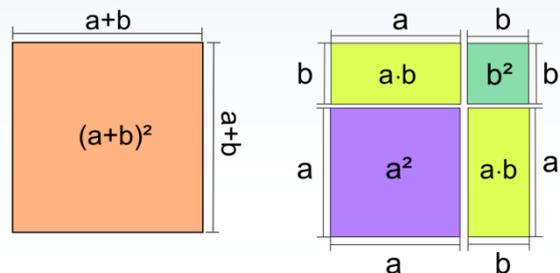
$$a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$



Die drei binomischen Formeln:

1. binomische Formel:
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel:
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel:
 $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Graphische Herleitung der 1. binomischen Formel:



Musterbeispiel

Binomische Formeln – „vorwärts“

Löse die Klammer auf und schreibe den Term mithilfe der binomischen Formel als Summe bzw. Differenz!

a. $(x + 3y)^2$ b. $(z - y)(z - y)$ c. $(3k + 4)(3k - 4)$

Lösung:

a. $\left(\underbrace{x}_a + \underbrace{3y}_b\right)^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{2 \cdot 3xy}_{2ab} + \underbrace{(3y)^2}_{b^2} = x^2 + 6xy + 9y^2$ (1. binomische Formel)

b. $(z - y)(z - y) = (z - y)^2 = z^2 - 2zy + y^2$ (2. binomische Formel)

c. $(3k + 4)(3k - 4) = (3k)^2 - (4)^2 = 9k^2 - 16$ (3. binomische Formel)

Binomische Formeln – „rückwärts“

Schreibe den Term mithilfe der binomischen Formeln als Produkt!

a. $4u^2 + 12u + 9$ b. $9 - 6x + x^2$ c. $36y^2 - 144$

Lösung:

a. $\underbrace{4u^2}_{a^2} + \underbrace{12u}_{2ab} + \underbrace{9}_{b^2} = \left(\underbrace{2u}_a + \underbrace{3}_b\right)^2$ (1. binomische Formel)

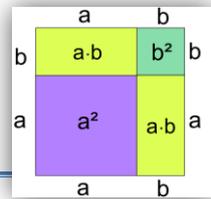
b. $\underbrace{9}_{a^2} - \underbrace{6x}_{2ab} + \underbrace{x^2}_{b^2} = \left(\underbrace{3}_a - \underbrace{2x}_b\right)^2$ (2. binomische Formel)

c. $\underbrace{36y^2}_{a^2} - \underbrace{144}_{b^2} = \left(\underbrace{6y}_a + \underbrace{12}_b\right)\left(\underbrace{6y}_a - \underbrace{12}_b\right)$ (3. binomische Formel)

Das Überführen einer Summe in ein Produkt nennt man **Faktorisieren**. Faktorisieren kann beispielsweise bei der **Nullstellenberechnung** von Funktionen helfen.

BIN Rechengesetze

Thema: Binomische Formeln



Übungsaufgaben

1. Bei welchen Termen kann man die binomischen Formeln zum Auflösen der Klammer anwenden?
Entscheide zuerst und löse dann die Klammer mithilfe der binomischen Formeln auf!

Hinweis: Hier kann dir der Infokasten und die Musteraufgabe helfen!

- a. $(b - c)^2$
- b. $7 - (u + 1)$
- c. $(5 + f)^2 + 1$
- d. $(3 + 4k)$
- e. $(a + b)(c - d)$
- f. $2\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$
- g. $(7 - g)(g + 7)$
- h. $(4p + p)^2$
- i. $(i^2 - 3)^2$
- j. $(3 - z)^5$
- k. $(l - 4m)^2$
- l. $(u - 5)(u - 5)$

2. Faktorisiere die gegebenen Terme mithilfe der binomischen Formeln!

Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe helfen!

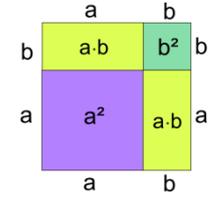
- a. $a^2 - 2a + 1$
- b. $1 - 9b^2$
- c. $x^2 + 2x \cdot 6 + 36$
- d. $h^2 - 2ht + t^2$
- e. $25 + 10p + p^2$
- f. $\frac{1}{4}a^2 - ab + b^2$
- g. $m^2 - n^2$
- h. $w^2 + w - 121 - w$

3. Fülle die Lücken!

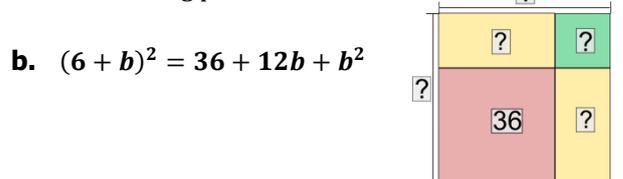
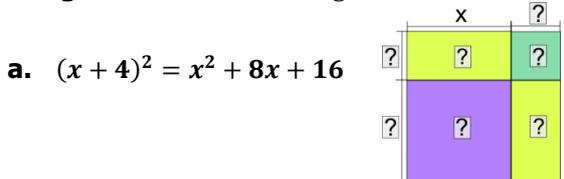
- a. $a^2 + 12a + \square = (a + 6)^2$
- b. $36s^2 - \square + 64 = (\square - \square)^2$
- c. $x^2 + 6xy + \square = (x + \square)^2$
- d. $\square + 10k + \square = (\square + k)^2$
- e. $\square - 10ab + \square = (2,5a - \square)^2$

4. Die Umformung unten wurde von einem Schüler durchgeführt. Erkläre anhand der Abbildung rechts, warum die Umformung im Allgemeinen falsch ist.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 ???$$



5. **Figuren** Beschrifte die Figuren, sodass sie zur angegebenen Rechnung passen!



6. Rechenricks

Binomische Formeln helfen als Zerlegung bei der Berechnung von Produkten und Quadratzahlen im Kopf! So kann man beispielsweise 23^2 mit der Zerlegung $(20 + 3)^2 = 400 + 2 \cdot 20 \cdot 3 + 9 = 529$ im Kopf berechnen.

- a. Berechne 26^2 , 54^2 und 19^2 mit dieser Methode.
- b. Auch folgende Ausdrücke lassen sich mithilfe der binomischen Formel schnell im Kopf berechnen:
 $29 \cdot 31 = ?$ $38 \cdot 42 = ?$ $99 \cdot 101 = ?$ Findest du den Trick?



Lösungen

1. a. $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$
 b. $7 - (u + 1) = 7 - u - 1 = 6 - u$
 c. $(5 + f)^2 + 1 = 25 + 10f + f^2 + 1 = 26 + 10f + f^2$
 d. $(3 + 4k) = 3 + 4k$
 e. $(a + b)(c - d) = ac - ad + bc - bd$
 f. $2\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 8$
 g. $(7 - g)(g + 7) = 49 - g^2$
 h. $(4p + p)^2 = 25p^2$
 i. $(i^2 - 3)^2 = i^4 - 6i^2 + 9$
 j. $(3 - z)^5 = (3 - z)^2 \cdot (3 - z)^3 = (9 - 6z + z^2) \cdot (27 - 27z + 9z^2 - z^3) = 27 - 54z + 36z^2 - 10z^3 + 12z^4 - 3z^5$
 k. $(l - 4m)^2 = l^2 - 8lm + 16m^2$
 l. $(u - 5)(u - 5) = u^2 - 10u + 25$
2. a. $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$
 b. $1 - 9b^2 = (1 - 3b)(1 + 3b)$
 c. $x^2 + 2x \cdot 6 + 36 = (x + 6)^2$
 d. $h^2 - 2ht + t^2 = (h - t)^2$
 e. $25 + 10p + p^2 = (5 + p)^2$
 f. $\frac{1}{4}a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2$
 g. $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$
 h. $w^2 + w - 121 - w = w^2 - 121 = (w - 11)(w + 11)$
3. a. $a^2 + 12a + \square = (a + 6)^2$ → $\square = 36$
 b. $36s^2 - \square + 64 = (\square - \square)^2$ → $\square = 6s$
 c. $x^2 + 6xy + \square = (x + \square)^2$ → $\square = 3y$
 d. $\square + 10k + \square = (\square + k)^2$ → $\square = 5k$
 e. $\square - 10ab + \square = (2,5a - \square)^2$ → $\square = 2,5a$
4. Bei der Umformung wurde der mittlere Summand der ersten binomischen Formel vergessen: $a^2 + 2ab + b^2$ In der Abbildung wurden bei der Umformung $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ die beiden Rechtecke mit ab fehlen.
5. a. $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$
 b. $(6 + b)^2 = 36 + 12b + b^2$

1. a. $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$
 b. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
 c. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
 d. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
 e. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
 f. $2\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = 2\left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) = \frac{x^2}{2} - 2x + 8$
 g. Binomische Formel
 h. Anwendung der bin. Formeln nicht sinnvoll (Hier kann man zwar eine binomische Formel anwenden, die Berechnung wird dadurch jedoch nicht einfacher; Zeitsparen ist es hier, den Ausdruck in der Klammer einfach zu zerlegen in $(3 - z)^2 \cdot (3 - z)^3$ und hier kann man die bin. Formeln anwenden
 k. $(l - 4m)^2 = l^2 - 8lm + 16m^2$
 l. $(u - 5)(u - 5) = u^2 - 10u + 25$
2. a. $a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2$
 b. $1 - 9b^2 = (1 - 3b)(1 + 3b)$
 c. $x^2 + 2x \cdot 6 + 36 = (x + 6)^2$
 d. $h^2 - 2ht + t^2 = (h - t)^2$
 e. $25 + 10p + p^2 = (5 + p)^2$
 f. $\frac{1}{4}a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2$
 g. Binomische Formel
 h. Anwendung der bin. Formeln nicht möglich
 i. $(i^2 - 3)^2 = i^4 - 6i^2 + 9$
 j. Anwendung der bin. Formeln nicht direkt möglich, der Ausdruck lässt sich jedoch zerlegen in $(3 - z)^2 \cdot (3 - z)^3$ und hier kann man die bin. Formeln anwenden
 k. $(l - 4m)^2 = l^2 - 8lm + 16m^2$
 l. $(u - 5)(u - 5) = u^2 - 10u + 25$