Was ist eine mathematische Funktion?

Funktionen sind eines der wichtigsten Werkzeuge der Mathematik. Mit Funktionen lassen sich **Änderungen und Abhängigkeiten beschreiben**. Für jeden zulässigen Eingabewert (***unabhängige Variable***, wird gewöhnlich mit x bezeichnet) legt die Funktion eindeutig einen Funktionswert (***abhängige Variable***, wird gewöhnlich mit y bezeichnet) fest. Beispielsweise ist die Temperatur an einem festen Ort abhängig von der Tageszeit – man kann eine Funktion betrachten, bei der jeder Tageszeit eine Temperatur zugeordnet wird. Eine *Veränderung der Tageszeit bewirkt dann eine Veränderung der Temperatur.*

Mathematische Definition:
Bei einer Funktion wird jedem Element x aus ihrer Definitionsmenge **genau ein** Element y aus der Wertemenge zugeordnet. Das heißt, es gibt keinen x −Wert, dem mehrere y −Werte zugeordnet werden.

Beim Arbeiten mit Funktionen sind folgende **Begriffe und Bezeichnungen** wichtig:

- $\boldsymbol{f(x) = y}$ bedeutet *„eine Funktion f ordnet der Zahl x die Zahl y zu“*, dabei wird
  - ⇨ $\boldsymbol{x}$ als **Stelle** oder **Argument** und
  - ⇨ $\boldsymbol{y}$ als **Funktionswert** der Funktion f an der Stelle x bezeichnet.

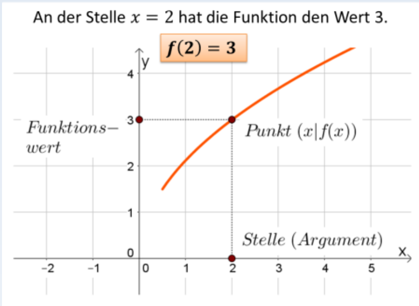


Abbildung 1

- $\boldsymbol{D_f}$ **Definitionsmenge** einer Funktion f
  - ⇨ ist die *Menge aller Zahlen, die ein x-Wert annehmen darf*
    <u>*Beispiel Abbildung 2*</u>: Die Funktion ist auf $D_f = [1; 5]$ definiert, das heißt die x-Werte können Zahlen aus dem Intervall $[1; 5]$ annehmen, also gilt $1 \leq x \leq 5$.

  Hinweis: Es ist üblich die größtmögliche Definitionsmenge für eine Funktion anzunehmen, wenn nichts angegeben ist.

- $\boldsymbol{W_f}$ **Wertemenge** einer Funktion f
  - ⇨ ist die *Menge aller Funktionswerte* (für eine bestimmte Definitionsmenge)
    <u>*Beispiel Abbildung*</u> *2*: Die Wertemenge ist $W_f = [-1; 4]$, also liegen alle Funktionswerte in diesem Intervall und es gilt $-1 \leq f(x) \leq 4$.

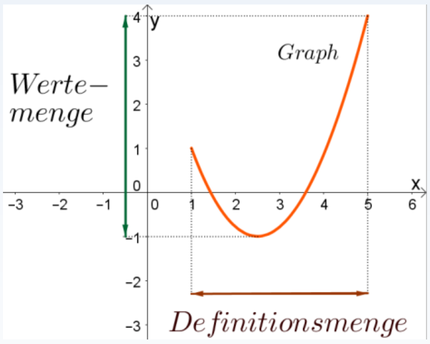
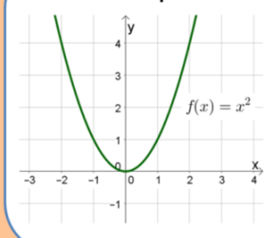


Abbildung 2

Wie kann man Funktionen darstellen?

Eine Funktion kann durch **ihren Graphen, mit Hilfe von Tabellen, als Funktionsgleichung oder im Text** dargestellt werden. Jede Darstellung hat bestimmte Vorteile, weshalb ein Darstellungswechsel oft hilfreich ist.

Graph



Text

„Jeder Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet.“

Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

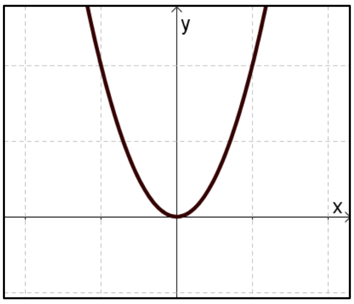
Funktionsgleichung

$f(x) = x^2$

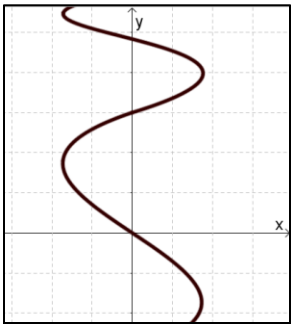
Übungsaufgaben

1. Welcher der folgenden Abbildungen stellen die Graphen von Funktionen dar!
Erkläre, welche Eigenschaft ein Graph haben muss, um eine Funktion darzustellen.

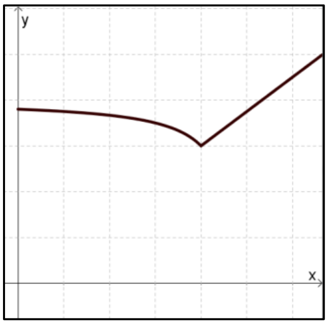
a.



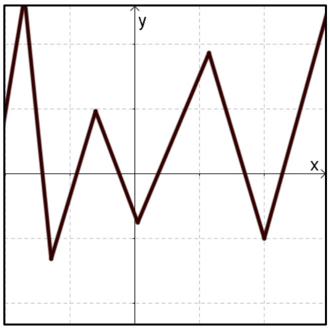
b.



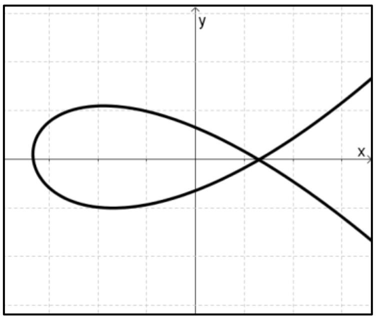
c.



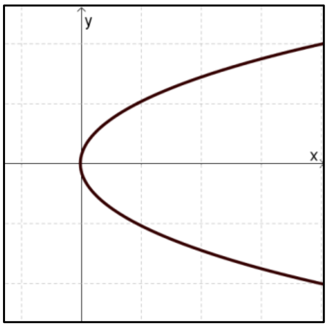
d.



e.



f.



2. Welche der folgenden Wertetabellen kann zu einer Funktion gehören?

a.

Gefahrene Kilometer km	1	2	3	4	5
Preis in €	4	5	6	7	8

b.

x	-1	0	1	2	3
y	3	1	3	5	7

c.

x	-1	-1	1	1	3
y	3	4	3	0	1

3. Welcher der folgenden Zusammenhänge kann durch eine Funktion beschrieben werden?
Begründe deine Entscheidung!

a. *„Der Preis ist abhängig von der gekauften Menge einer Ware.“*	**b.** *„Jeder natürlichen Zahl wird ihr Vorgänger und ihr Nachfolger zugeordnet.“*	**c.** *„Jeder natürlichen Zahl wird die Anzahl ihrer Teiler zugeordnet.“*
d. *„Einer reellen Zahl x wird ihre Quadratzahl zugeordnet.“*	**e.** *„Der Zeit nach dem Öffnen eines Wasserhahns wird die ausgeflossene Wassermenge zugeordnet.“*	**f.** *„Bei allen Personen in Hessen wird der Körpergröße das Gewicht zugeordnet.“*

Tipp zu 3.: Überlege dir, ob die Zuordnung eindeutig ist und was die abhängige und die unabhängige Variable ist!

4. Gegeben ist eine Funktion f. Formuliere die folgenden mathematischen Aussagen mithilfe der Begriffe „Stelle“ und „Funktionswert“ in Worten!

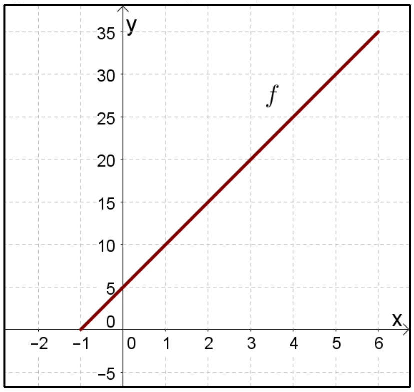
a. $f(1) = 0$ **b.** $f(0) = -3$ **c.** $f(2) < f(-5)$ **d.** $f(x) \geq 7$ für alle $x > 10$

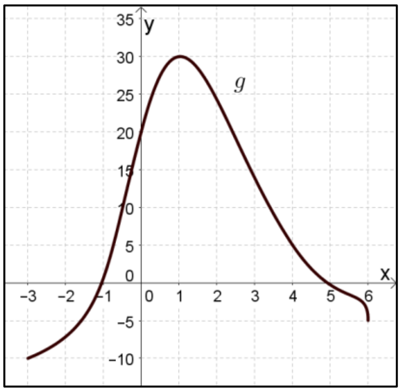
5. Jedem Monat des Jahres 2015 wurde eine Durchschnittstemperatur zugeordnet. Schreibe die Sätze in Funktionssymbolik mit $f(x) = y$ und ordne die abhängige und die unabhängige Variable zu!

- **a.** Im September betrug die Durchschnittstemperatur 12,8 °C.
- **b.** Die durchschnittliche Temperatur im März betrug 5 °C.
- **c.** Die Durchschnittstemperatur im Februar war geringer als die Durchschnittstemperatur im Januar.
- **d.** Die Durchschnittstemperatur betrug nie mehr als 21 °C.

6. Funktionensteckbrief!

Gegeben sind die Funktionsgraphen der Funktionen f, g.
Löse die folgenden Teilaufgaben jeweils für beide Funktionen!





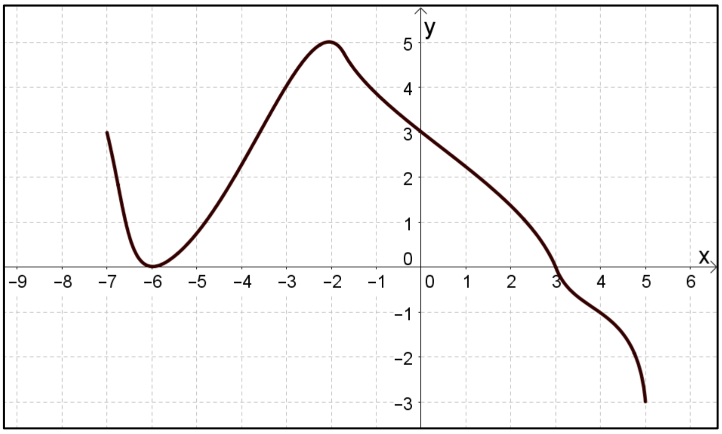
a. Gib die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktionen f, g an!
b. Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle 4?
c. An welcher Stelle beträgt der Funktionswert 30?
d. Für welche x-Werte gilt $f(x) \leq 20$ bzw. $g(x) \leq 20$?
e. Für welche x-Werte wird der größte bzw. der kleinste Funktionswert angenommen?

7. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x + 1$.
a. Gib die Funktionswerte für $x_1 = 1, x_2 = 0$ und $x_3 = -2$ an.
b. An welcher Stelle nimmt die Funktion den Wert 3 an?
c. An welcher Stelle nimmt die Funktion den Wert 10 an?
d. Berechne die Nullstelle der Funktion! Welcher Funktionswert liegt an dieser Stelle vor? **LF3**
e. Gib den Schnittpunkt mit der y-Achse an! Welcher x –Wert liegt vor? **LF1**

Verweise
LF1 Graph und Gleichung linearer Funktionen
LF3 Nullstellen linearer Funktionen

8. Gib die größtmögliche Definitionsmenge der folgenden Funktionen an!
a. $f_1(x) = x^2 + 1$ **b.** $f_2(x) = \frac{1}{x}$ **c.** $f_3(x) = \sqrt{x}$

9. Die Abbildung zeigt den Graph der Funktion f.



a. Gib die Definitionsmenge und die Wertemenge der Funktion an!
b. Gib die Nullstellen der Funktion an!
c. Gib den Schnittpunkt mit der y-Achse an!
d. Gib ein Intervall an, in dem die Funktionswerte größer als 2 sind.
e. Für welche Argumente sind die Funktionswerte negativ?
f. Gib ein Intervall an, in dem der Funktionsgraph steigt und eines in dem der Graph fällt.

10. Skizziere die Graphen der Funktionen f, g, h mit folgenden Eigenschaften.
Hinweis: Hier sind mehrere Lösungen möglich!
a. Definitionsmenge ist $D_f = [-1; 1]$ und $f(0) = 2$.
b. Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$ und für die Funktionswerte gilt $1 \leq g(x) \leq 5$
c. Definitionsmenge $D_h = [1; 4]$, Wertemenge $W_h = [-2; 2]$ und $h(1) > h(4)$

11. Entscheide, welche Aussagen wahr oder falsch sind!
Begründe deine Entscheidung kurz!

		wahr	falsch	Begründung
a.	Die Definitionsmenge einer Funktion ist die Menge aller möglichen Funktionswerte der Funktion.			
b.	Liegt der Punkt $P(3\|2)$ auf dem Graphen einer Funktion f, so gilt $f(3) = 2$			
c.	Die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x}$ ist für alle reellen Zahlen definiert, es gilt also $D_f = \mathbb{R}$.			
d.	Eine Funktion kann die y-Achse beliebig oft schneiden, die x-Achse hingegen nur genau einmal.			

Lösungen

1. Die Graphen **a., c.** und **d.** stellen Graphen von Funktionen dar. Jedem x-Wert darf nur genau ein y-Wert zugeordnet werden. Sobald einem x-Wert mehrere y-Werte zugeordnet sind, handelt es sich nicht mehr um eine eindeutige Zuordnung.

2. Die Tabellen **a.** und **b.** können zu Funktionen gehören. Tabelle c. nicht, da dem Wert $x = -1$ und dem Wert $x = 1$ mehrere y-Werte zugeordnet sind.

3. Die Zusammenhänge **a., c., d.** und **e.** können durch eine Funktion beschrieben werden, da die Zuordnung eindeutig vorgenommen werden kann (z.B.: bei c. jeder Zahl hat eine feste Anzahl von Teilern). Bei **b**. werden jedoch jeder Zahl zwei Werte zugeordnet. Bei **f.** kann der Fall eintreten, dass Personen mit der gleichen Körpergröße unterschiedlich viel wiegen. Damit ist diese Zuordnung nicht eindeutig.

4.

a. f(1) = 0 „An der Stelle $x = 1$ hat die Funktion den Wert 0."

b. $f(0) = -3$ „An der Stelle $x = 0$ hat die Funktion den Wert -3."

c. $f(2) < f(-5)$ „Der Funktionswert an der Stelle $x = 2$ ist kleiner als der Funktionswert an der Stelle $x = -5$."

d. $f(x) \geq 7$ für alle $x > 10$ „Für alle x-Werte größer als 10 sind die zugehörigen Funktionswerte größer gleich 7."

5. Man kann eine Funktion f betrachten, die dem **Monat** $\boldsymbol{x}$ (unabhängige Variable) die **Durchschnittstemperatur** $\boldsymbol{y}$ in °C (abhängige Variable) zuordnet.

a. $f(9) = 12{,}8$ **b.** $f(3) = 5$ **c.** $f(2) < f(1)$ **d.** $f(x) \leq 21$

6.

	Funktion f	Funktion g
a.	$D_f = [-1; 6]$ und $W_f = [0; 35]$	$D_g = [-3; 6]$ und $W_g = [-10; 30]$
b.	$f(4) = 25$	$g(4) = 5$
c.	$f(x) = 30$ für $x = 5$	$g(x) = 30$ für $x = 1$
d.	$f(x) \leq 20$ für alle $x \leq 3$	$g(x) \leq 20$ für alle $x \in [-3; 0]$ und für alle $x \in [2{,}5; 6]$
e.	▪ größter Funktionswert ist 35 und wird bei $x = 6$ angenommen ▪ kleinster Funktionswert ist 0 und wird bei $x = -1$ angenommen	▪ größter Funktionswert ist 30 und wird bei $x = 1$ angenommen ▪ kleinster Funktionswert ist -10 und wird bei $x = -3$ angenommen

7. **Funktion $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$**

a. $\boldsymbol{f(1)} = 2 \cdot 1 + 1 = \boldsymbol{3}$, $\boldsymbol{f(0)} = 2 \cdot 0 + 1 = \boldsymbol{1}$,
$\boldsymbol{f(-2)} = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = \boldsymbol{-3}$

b. $f(x) = 1$: $2x + 1 = 3$ nach x umstellen ergibt: $\boldsymbol{x = 1}$
Also $f(1) = 1$

c. $f(x) = 10$: $2x + 1 = 10$ nach x umstellen ergibt: $\boldsymbol{x = 4{,}5}$

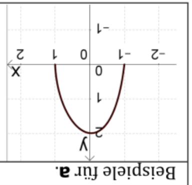
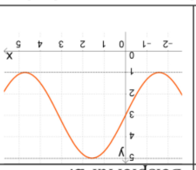
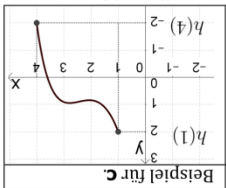
d. Für die Nullstellenberechnung löst man folgende Gleichung: $f(x) = 2x + 1 = 0$. Man sucht also die x-Werte für die die **Funktionswerte null** sind. Durch Umstellen nach x erhält man die Nullstelle $x_1 = -\frac{1}{2}$

e. Den Schnittpunkt mit der y-Achse kann man anhand der Funktionsgleichung ablesen. An dieser Stelle ist der **x-Wert immer null**, es gilt also $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Der Schnittpunkt liegt bei $S_y(0|1)$.

8. **a.** $D_f = \mathbb{R}$ keine Einschränkung für x **b.** $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ – gesprochen "$\mathbb{R}$ ohne null". Die Funktion ist an der Stelle **null nicht definiert**.
c. $D_f = \mathbb{R}^+$ das heißt die Funktion ist nur für **Zahlen größer gleich null definiert,** da das Wurzelziehen nur für positive Zahlen definiert ist.

9. **a.** $D_f = [-7; 5]$ und $W_f = [-3; 5]$
b. Nullstellen bei $x_1 = -6$ und $x_2 = 3$
c. Schnittpunkt $S_y(0|3)$
d. Beispielsweise auf dem Intervall $x \in [-4; 1]$
e. Die Funktionswerte sind negativ für $3 < x \leq 5$
f. Graph steigt von beispielsweise von [-5;-3] und fällt von [-1;4]

10.

Beispiel für **a.**	Beispiel für **b.**	Beispiel für **c.**
		

11. **a. falsch** - Die Definitionsmenge gibt die Menge aller Zahlen an, die die x-Werte (Argumente) annehmen dürfen.
b. richtig – Für einen Punkt auf dem Graphen der Funktion gilt $P(x|f(x))$, liegt also der Punkt $P(3|2)$ auf der Funktion muss gelten $f(3) = 2$.
c. falsch – Die Wurzelfunktion ist nur für positive reelle Zahlen definiert, somit ist auch die Funktion $f(x) = x + \sqrt{x}$ nur auf den positiven reellen Zahlen definiert.
d. falsch- Laut der Definition wird bei einer Funktion jedem x-Wert eindeutig ein y-Wert zugeordnet, die Funktion kann an der Stelle $x = 0$ also nicht mehrere Funktionswerte annehmen (y-Achse mehrmals schneiden). Die x-Achse kann hingegen beliebig oft geschnitten werden (Nullstellen der Funktion). Die Aussage müsste korrekt lauten: Eine Funktion kann die$x$-Achse beliebig oft schneiden, die y-Achse hingegen nur genau einmal.