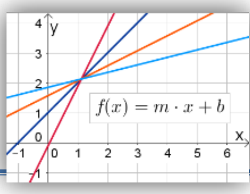
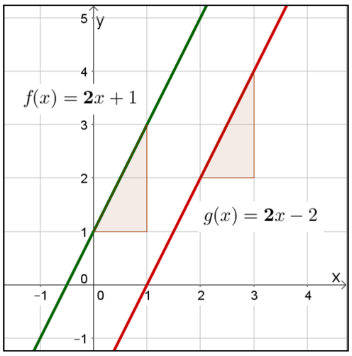


Wie kann die Lage zweier Geraden zueinander beschrieben werden?

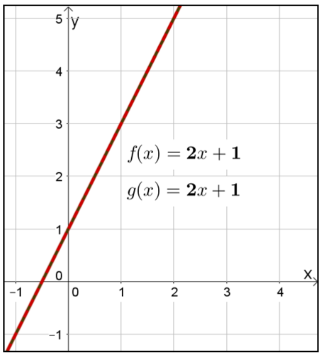
In der Ebene können Geraden als Graphen linearer Funktionen *parallel verlaufen*, *zusammen fallen* oder *sich in einem Punkt schneiden*. Die Lage zweier Geraden zueinander kann anhand der Graphen im Koordinatensystem oder mithilfe der Funktionsgleichungen beschrieben werden:

Geraden sind parallel



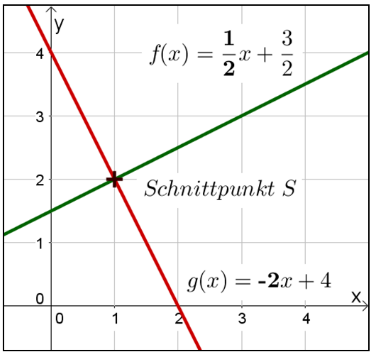
Zwei Geraden sind parallel, wenn Sie **keinen Punkt** gemeinsam haben. Die **Steigungen sind gleich** und die y-Achsenabschnitte verschieden.

Geraden fallen zusammen



Sind die **Steigungen und die y-Achsenabschnitte gleich**, fallen die Geraden zusammen und sind identisch. Sie haben dann **unendlich viele Punkte** gemeinsam.

Geraden schneiden einander



Zwei Geraden schneiden einander in **genau einem Punkt**, wenn die **Steigungen beider Geraden unterschiedlich** sind.

Die Beschreibung der Lagebeziehungen kann beispielsweise zur Bestimmung von Treffpunkten bei verschiedenen Bewegungsabläufen oder beim Zeichnen mehrerer Geraden helfen.

Musterbeispiel – Lage zweier Geraden

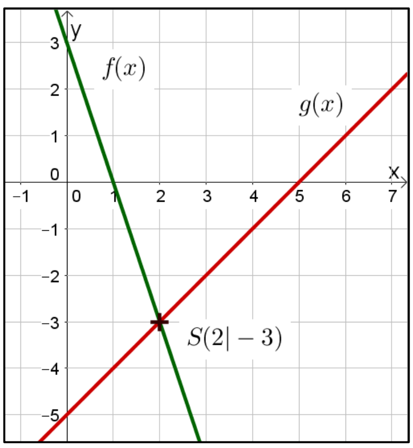
Gegeben sind die Funktionen $f(x) = -3x + 3$ und $g(x) = x - 5$.
Untersuche die Lage der beiden Geraden zueinander.
Lösungsansätze:

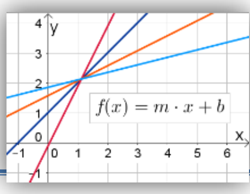
Die Funktionen f(x) und g(x) haben **unterschiedliche Steigung** ($m_f = -3$ und $m_g = 1$), deshalb schneiden die Geraden einander und es kann der **Schnittpunkt bestimmt** werden:

Schnittpunkt rechnerisch:

1. Funktionsterme gleichsetzen:
   $$f(x) = g(x)$$
   $$-3x + 3 = x - 5$$
2. Gleichung $\mathbf{f(x) = g(x)}$ nach $\mathbf{x}$ auflösen:
   $$-3x + 3 = x - 5 \quad | -3$$
   $$-3x = x - 8 \quad | -x$$
   $$-4x = -8 \quad |:(-4)$$
   $$\boldsymbol{x = 2}$$
3. **y – Wert** des Punktes berechnet man durch Einsetzen des gefunden x – Wertes in eine der Funktionsgleichungen:
   $f(2) = -3 \cdot 2 + 3 = -6 + 3 = \mathbf{-3}$
   Also schneiden sich $f(x)$ und $g(x)$im Punkt $S(2|{-3})$.

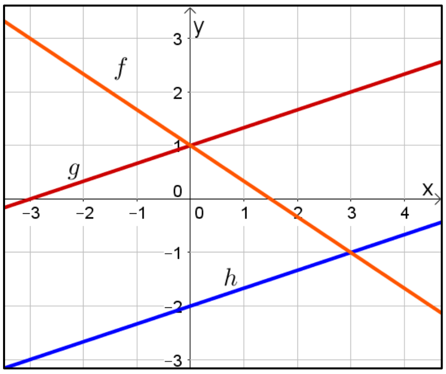
Schnittpunkt graphisch:





Übungsaufgaben

1. Gegeben sind die Graphen der Funktionen f, g und h. Beschreibe jeweils die Lage der Geraden zueinander! Gib bei den Geraden, die sich schneiden auch den Schnittpunkt an!



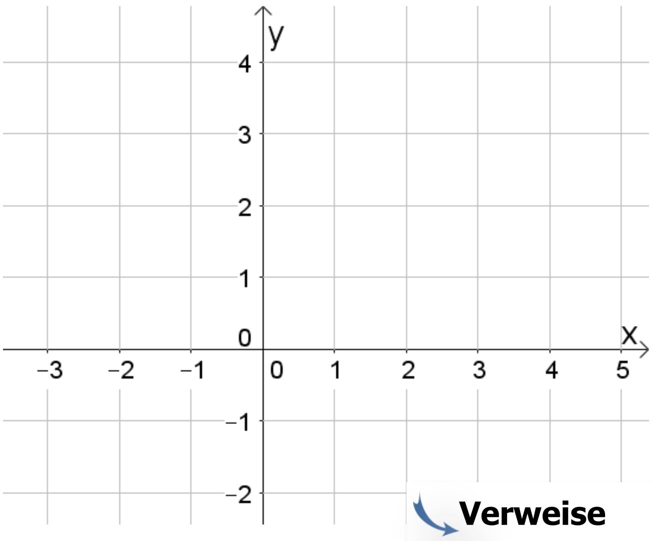
2. Auf einen Blick!
Entscheide ohne weitere Rechnung, ob sich die gegebenen Funktionen jeweils *in einem Punkt schneiden*, *parallel zueinander liegen* oder *identisch* sind und begründe deine Entscheidung! *Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!*

a. $f_1(x) = 4x + 1$ und $f_2(x) = 4x + 2$
b. $g_1(x) = 5x$ und $g_2(x) = 5{,}1x$
c. $h_1(x) = x + 1$ und $h_2(x) = 3x + 3$
d. $k_1(x) = -x + 5$ und $k_2(x) = 5 - x$

3. Graphen zeichnen LF1

a. Skizziere in das nebenstehende Koordinatensystem die Graphen der Funktionen
$f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{4}{2}$ und $f_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{6}{3}$.
Wie liegen die beiden Geraden zueinander?

b. Skizziere in das nebenstehende Koordinatensystem zusätzlich den Graphen der Funktion $f_3(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.
Wie liegt der Graph von f_3 zu den Geraden f_1 und f_2?



Verweise
LF1 Graph und Gleichung linearer Funktionen

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 1$. Gib die Gleichung einer linearen Funktion $g(x)$ an, so dass die beiden Funktionsgraphen
a. parallel verlaufen,
b. zusammenfallen (also identisch sind),
c. sich im Punkt $(0|1)$ schneiden.

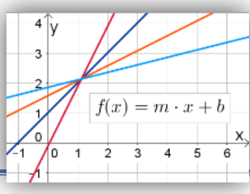
---

5. Bestimme wenn möglich den Schnittpunkt (mit x- und y-Koordinate) der folgenden Funktionen!
Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe helfen!

a. $f_1(x) = 3x + 7$ und $f_2(x) = -2x - 3$
b. $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x + 1$
c. $h_1(x) = 7x + 10$ und $h_2(x) = 5x + 8$
d. $k_1(x) = 100x + 1$ und $k_2(x) = 100x + 2$
e. $j_1(x) = 4x + 3$ und $j_2(x) = -4x + 3$

LF2 Lineare Funktionen

Thema: Lagebeziehungen von Geraden

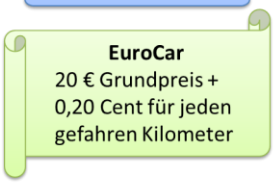


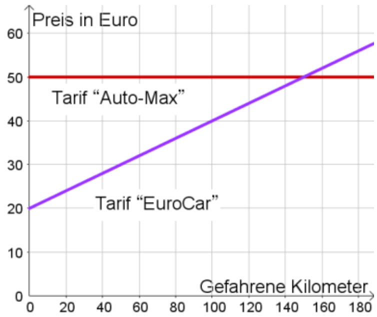
6. Entscheide welche Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe deine Entscheidung kurz!	wahr	falsch	Begründung
a. Geraden mit unterschiedlicher Steigung können sich nur in höchstens einem Punkt schneiden.			
b. Bei einem Schnittpunkt besitzen beide Funktionen denselben y-Wert.			
c. Haben zwei lineare Funktionen unterschiedliche Steigungen verlaufen sie parallel.			
d. Ist der y-Achsenabschnitt von zwei linearen Funktionen gleich, schneiden sie sich genau in diesem Punkt.			

7. Auto-Tarife LF 4

Ein Schnittpunkt kann dabei helfen sich zwischen verschiedenen Möglichkeiten zu entscheiden.

Vergleiche die gegebenen Leihtarife für Autos, beantworte dazu die untenstehenden Fragen!





a. Welchen Anbieter sollte man wählen, wenn man voraussichtlich eine Strecke von 60 km Tag fahren möchte?

b. Ab welcher gefahrenen Strecke ist der Tarif von „Auto-Max" zu empfehlen?

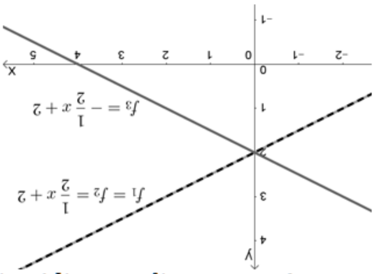
Verweis
LF4 Lineare Funktionen im Kontext

Lösungen

1. Der Graph f schneidet den Graph g im Punkt $S_1(0|1)$.
Der Graph f schneidet den Graph h im Punkt $S_2(3|-1)$.
Die Graphen g und h verlaufen parallel.

2.
a. Die Graphen f_1 und f_2 verlaufen parallel, da die Steigungen beider Graphen gleich 4 sind und die y-Achsenabschnitte verschieden.
b. Die Graphen g_1 und g_2 schneiden sich im Ursprung, da die Steigungen verschieden sind und beide Graphen durch (0|0) verlaufen.
c. Die Graphen h_1 und h_2 schneiden sich, da die Steigungen verschieden sind.
d. Die Graphen k_1 und k_2 sind identisch und fallen zusammen (Steigung und y-Achsenabschnitt sind gleich).

3. **a.** Die Graphen der Funktionen f_1 und f_2 fallen zusammen.
b. Der Graph der Funktion f_3 schneidet f_1 (bzw. f_2) im Punkt $S(0|2)$



4. **a.** Die Gleichung einer Funktion, die parallel zu $f(x)$ verläuft, muss denselben Anstieg wie $f(x)$ und einen anderen y-Achsenabschnitt haben. Ein Beispiel ist:
$g(x) = 3x + 3$
b. Die Gleichung einer Funktion, die identisch wie f(x) verläuft, hat denselben Anstieg und denselben y-Achsenabschnitt: Ein Beispiel ist:
$g(x) = 3x + \frac{4}{4}$

5. **a.** Schnittpunkt von $f_1(x)$ und $f_2(x)$: $S_f(-2|1)$
b. Schnittpunkt von $g_1(x)$ und $g_2(x)$: $S_g(\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$
c. Schnittpunkt von $h_1(x)$ und $h_2(x)$: $S_h(-1|3)$
d. Die Funktionen k_1 und k_2 schneiden sich nicht, sie verlaufen parallel.
e. Schnittpunkt von $j_1(x)$ und $j_2(x)$: $S_j(0|3)$

6. **a.** Die Aussage ist wahr (haben die beiden Geraden eine unterschiedliche Steigung können sie nicht identisch sein und können sich somit nur in einem Punkt schneiden).
b. Die Aussage ist wahr (die Funktionen besitzen im Schnittpunkt sowohl denselben x- als auch y-Wert).
c. Falsch, haben zwei lineare Funktionen unterschiedliche Steigungen, so schneiden sie sich.
d. Falsch, ist der y-Achsenabschnitt gleich und die Steigungen unterschiedlich so ist die Aussage wahr. Sind jedoch auch die Steigungen gleich, so sind die Funktionen identisch.

7. **a.** An der Stelle $x = 60$ hat der Tarif „EuroCar" den kleineren y-Wert, also ist dieser Tarif für eine Strecke von 60 km günstiger.
b. Hier ist der Schnittpunkt zu beachten: Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(150|50)$. Also ab 150 km ist der Tarif „Auto-Max" günstiger im Vergleich zu „EuroCar".