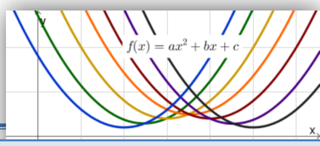
QF1 Quadratische Funktionen

Thema: Graph und Funktionsgleichung



Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen werden in der Physik verwendet, um beschleunigte Bewegungen (wie einen Ballwurf) zu beschreiben.
Der Graph einer quadratischen Funktion heißt „Parabel“. Die Funktion mit der Gleichung $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ nennt man **Normalparabel**.
Die allgemeine Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion lautet

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Bei dieser Darstellung kann man den **Streck-/Stauchfaktor a** sowie den **Schnittpunkt mit der y-Achse c** direkt ablesen.
Eine weitere Darstellungsmöglichkeit der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist die **Scheitelpunktform**

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - e)^2 + d}$$

mit dem **Streck-/Stauchfaktor a** und dem **Scheitelpunkt $S\ (e/d)$**, wobei e die Verschiebung der Normalparabel in x-Richtung und d die Verschiebung in y-Richtung beschreibt.
Bei dieser Darstellung lässt sich der Scheitelpunkt direkt ablesen und die Darstellung eignet sich häufig besser zum Skizzieren des Graphen.
Eine dritte algebraische Darstellungsmöglichkeit ist die **faktorisierte Form**

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - n_1) \cdot (x - n_2)}$$

Bei dieser Darstellung lassen sich die **Nullstellen n_1 und n_2** und der **Streck-/Stauchfaktor** a der Funktion direkt ablesen, z.B. $f(x) = (x - 1)(x + 3)$ hat die Nullstellen $n_1 = 1$ und $n_2 = -3$ (Vorzeichen beachten!).

Wo braucht man quadratische Funktionen?
Quadratische Funktionen werden beispielsweise zur Beschreibung von Würfen oder bei der Berechnung des Flächeninhalts von Quadraten genutzt.

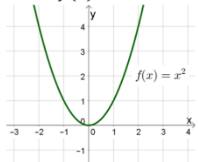
Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion

Allgemeine Form
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Scheitelpunktform
$f(x) = a \cdot (x - e)^2 + d$

Faktorisierte Form
$f(x) = a \cdot (x - n_1)(x - n_2)$

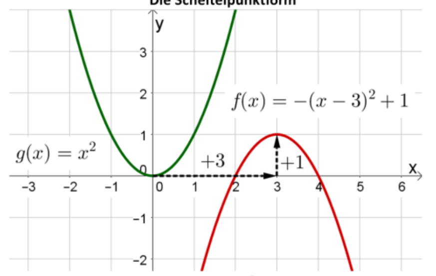
Graph der Normalparabel $f(x) = x^2$



Wertetabelle der Funktion $f(x) = x^2$

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

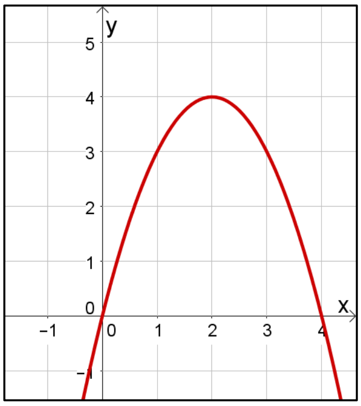
Die Scheitelpunktform



- **Funktionsgleichung:** $f(x) = a \cdot (x - e)^2 + d$
  zum Beispiel $f(x) = -(x - 3)^2 + 1$ im Vergleich zu $g(x) = x^2$
- **Parameter e gibt die Verschiebung in x-Richtung an:**
  im Beispiel $e = 3$ (ACHTUNG – Vorzeichen!), also drei Einheiten in positive x-Richtung
- **Parameter d gibt die Verschiebung in y-Richtung an:**
  im Beispiel $d = 1$, also eine Einheit in positive y-Richtung
- **Parameter a ist der Streck-/Stauchfaktor:**
  im Beispiel ist $a = -1$, also wird der Funktionsgraph an der x-Achse gespiegelt (Funktionsgraph ist „nach unten geöffnet“)

Musterbeispiele – Funktionsgleichung anhand eines Graphen bestimmen

Bestimme die Funktionsgleichung zum abgebildeten Funktionsgraphen in *Scheitelpunktform* und in *der allgemeinen Form*!



Lösung:
Wir bestimmen zunächst die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform.

- Der Funktionsgraph ist nicht gestreckt oder gestaucht, der Graph ist nach unten geöffnet → $a = -1$
- Der Funktionsgraph ist um zwei Einheiten nach rechts verschoben → $e = 2$
- Der Funktionsgraph ist um vier Einheiten nach oben verschoben → $d = 4$

Der Scheitelpunkt liegt bei $S(2/4)$. Die Funktionsgleichung in lautet:
$\boldsymbol{f(x) = -(x - 2)^2 + 4}$ **mit $a = -1, e = 2$ und $d = 4$**

Achtung! Die Verschiebung in positive x-Richtung ($e = +2$) hat in der Funktionsgleichung ein negatives Vorzeichen!

Die Funktionsgleichung kann nun in die allgemeine Form umgeformt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x - 2)^2 + 4 && |\text{binomische Formel anwenden} \\ &= -(x^2 + 4x + 4) + 4 && |\text{Klammer auflösen} \\ &= -x^2 - 4x - 4 + 4 && |\text{zusammenfassen} \end{aligned}$$

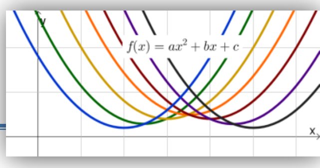
$\boldsymbol{f(x) = -x^2 - 4x}$

Die Funktionsgleichung der allgemeinen Form lautet:
$\boldsymbol{f(x) = -x^2 - 4x}$ **mit $a = -1, b = -4$ und $c = 0$**

Verweis
BIN Binomische Formeln

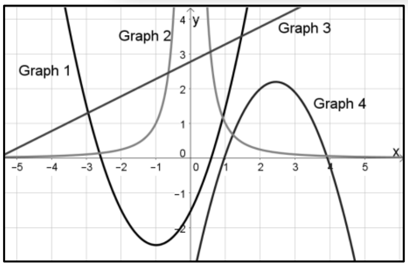
QF1 Quadratische Funktionen

Thema: Graph und Funktionsgleichung



Übungsaufgaben

1. Welche der rechts abgebildeten Funktionsgraphen gehören zu einer quadratischen Funktion, welche nicht?



2. Welche der folgenden Funktionsgleichungen gehören zu quadratischen Funktionen, welche nicht?
Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!

a. $f_1(x) = x^2$

b. $f_2(x) = 1 + x^2$

c. $f_3(x) = 2x$

d. $f_4(x) = (x+2)^2$

e. $f_5(x) = \frac{1}{x^2+1}$

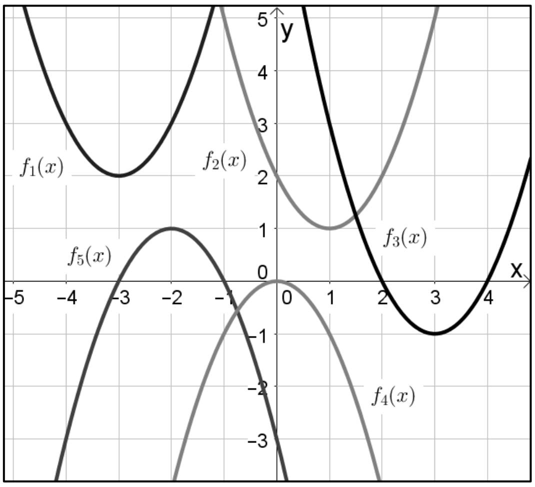
f. $f_6(x) = \frac{x^2+2}{2}$

g. $f_6(x) = 2(x-1) + 3$

h. $f_7(x) = (x-2) \cdot (x-1)$

i. $f_8(x) = (x-3) + (x+5)$

3. Gib den **Scheitelpunkt** und die **Funktionsgleichung in Scheitelpunktform** der abgebildeten quadratischen Funktionen an! *Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe helfen!*



Funktion	Scheitelpunkt S	Funktionsgleichung
$f_1(x)$	$S(-3/2)$	$f_1(x) = (x + 3)^2 + 2$ ⚠ Vorzeichen beachten!
$f_2(x)$		$f_2(x)$=
$f_3(x)$		$f_3(x)$=
$f_4(x)$		$f_4(x)$=
$f_5(x)$		$f_5(x)$=

4. Lies den Scheitelpunkt der quadratischen Funktionen anhand der Funktionsgleichung ab!

a. $f_1(x) = (x-2)^2 + 1$

b. $f_2(x) = x^2 + 1$

c. $f_3(x) = x^2$

d. $f_4(x) = (x+2)^2$

e. $f_5(x) = -(x-1)^2$

f. $f_6(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 1$

g. $f_7(x) = 2(x-1)^2 + 3$

h. $f_8(x) = x^2 - 7$

i. $f_9(x) = 2x^2 - 5$

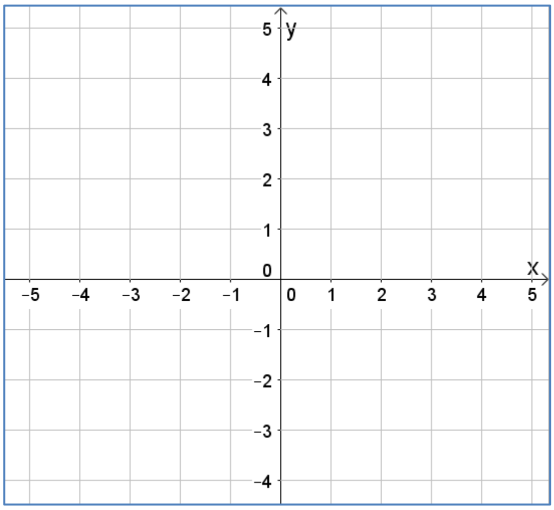
5. Skizziere die Funktionsgraphen zu den gegeben Funktionsgleichungen in das nebenstehende Koordinatensystem!

a. $f(x) = x^2 + 1$

b. $g(x) = (x-2)^2 - 1$

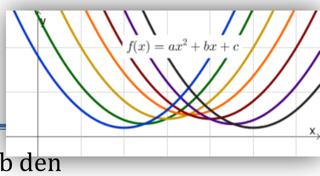
c. $h(x) = -(x+3)^2 + 4$

d. $k(x) = -(x+2)^2$



QF1 Quadratische Funktionen

Thema: Graph und Funktionsgleichung



6. Forme die gegebenen Funktionsgleichungen **in die allgemeine Form** um und gib den **Schnittpunkt** der Funktionen mit der **y-Achse** an!
Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe helfen!

a. $f_1(x) = (x+2)^2$ **c.** $f_3(x) = (x-3)^2 + 4$ **e.** $f_5(x) = -(x+2)^2$
b. $f_2(x) = 2(x-1)^2$ **d.** $f_4(x) = -(x+3)^2 - 2$ **f.** $f_6(x) = (x-1)(x+1)$

7. Welcher der gegebenen Punkte liegen auf dem Graphen der Normalparabel $f(x) = x^2$.
a. $A(1/2)$ **b.** $B(-3/9)$ **c.** $C(4/8)$ **d.** $D(-7/49)$ **e.** $E(36/6)$ **f.** $F(-5/-25)$

8. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$.
a. Überprüfe, welcher der Punkte $A(1/2), B(0/3), C(-2/-1)$ und $D(1/8)$ auf dem Graphen der Funktion f liegt.
b. Bestimme die Funktionswerte $f(0), f(-2)$ und $f(-4)$.
c. Bestimme die Nullstellen der Funktion f. **QF2**
d. Skizziere die Funktion in ein passendes Koordinatensystem.

Verweis
QF2 Quadratische Gleichungen / Nullstellen

9. Entscheide welche Aussagen wahr oder falsch sind! Begründe deine Entscheidung kurz!	wahr	falsch	Begründung
a. Die Funktion $f(x) = (x-3)^2 + 7$ ist eine um 3 Einheiten nach links und um 7 Einheiten nach oben verschobene Normalparabel.			
b. Verdoppelt sich bei der Normalparabel der x-Wert, dann vervierfacht sich der y-Wert.			
c. Bei einer Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform lässt sich immer direkt der Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der y-Achse ablesen.			

10. Funktionen gesucht!
Stelle anhand der gegebenen Informationen eine passende Funktionsgleichung auf!
(Tipp: Veranschaulichungen im Koordinatensystem und der Infokasten können dir helfen!)
Gesucht ist die Gleichung einer quadratischen Funktion, die…

a. …eine um 2 Einheiten nach rechts und um 4 Einheiten nach oben verschobene Normalparabel ist.
b. … um den Faktor 2 gestaucht und nach unten geöffnet ist. Der Scheitelpunkt liegt bei $S(0/3)$.
c. …eine Nullstellen hat, nicht gestreckt oder gestaucht ist und nicht in x- oder y-Richtung verschoben ist.

Lösungen

1. Graph 1 und Graph 4 gehören zu quadratischen Funktionen.

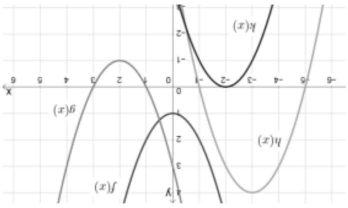
2. Folgende Funktionsgleichungen gehören zu quadratischen Funktionen:
$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 + x^2$, $f_4(x) = (x+2)^2$, $f_6(x) = \frac{x^2+2}{2}$, und
$f_7(x-2) \cdot (x-1)$
($f_6(x)$ kann man auch wie folgt schreiben $f_6(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$)

3.

Funktion	Scheitelpunkt S	Funktionsgleichung
$f_2(x)$	$S(1/1)$	$f_2(x) = (x-1)^2 + 1$
$f_3(x)$	$S(3/-1)$	$f_3(x) = (x-3)^2 - 1$
$f_4(x)$	$S(0/0)$	$f_4(x) = -x^2$
$f_5(x)$	$S(-2/1)$	$f_5(x) = -(x+2)^2 + 1$

4.
a. $f_1(x) = (x-2)^2 + 1$
$\boldsymbol{S(2/1)}$
b. $f_2(x) = x^2 + 1$
$\boldsymbol{S(0/1)}$
c. $f_3(x) = x^2$
$\boldsymbol{S(0/0)}$
d. $f_4(x) = (x+2)^2$
$\boldsymbol{S(-2/0)}$
e. $f_5(x) = -(x-1)^2$
$\boldsymbol{S(1/0)}$
f. $f_6(x) = \frac{1}{4}(x+3)^2 - 1$
$\boldsymbol{S(-3/-1)}$
g. $f_7(x) = 2(x-1)^2 + 3$
$\boldsymbol{S(1/3)}$
h. $f_8(x) = x^2 - 7$
$\boldsymbol{S(0/-7)}$
i. $f_9(x) = 2x^2 - 5$
$\boldsymbol{S(0/-5)}$

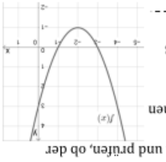
5.



6.
a. $f_1(x) = (x+2)^2$
$\boldsymbol{f_1(x) = x^2 + 4x + 4}$
b. $f_2(x) = 2(x-1)^2$
$\boldsymbol{f_2(x) = 2x^2 - 4x + 2}$
c. $f_3(x) = (x-3)^2 + 4$
$\boldsymbol{f_3(x) = x^2 - 6x + 13}$
d. $f_4(x) = -(x+3)^2 - 2$
$\boldsymbol{f_{4(x)} = -x^2 - 6x - 11}$
e. $f_5(x) = -(x+2)^2$
$\boldsymbol{f_5(x) = -x^2 - 4x - 4}$
f. $f_6(x) = (x-1)(x+1)$
$\boldsymbol{f_6(x) = x^2 - 1}$

7. Um zu überprüfen, welche Punkte auf dem Graphen $f(x) = x^2$ liegen, setzt man die x- und y-Koordinaten der Punkte in die Funktionsgleichung ein bzw. überprüft, ob der x-Wert quadriert den y-Wert ergibt:
a. $A(1/2)$ in $f(x)$: $1^2 = 1 \neq 2$ (A liegt nicht auf dem Graphen der Funktion f)
b. $B(-3/9)$ in $f(x)$: $(-3)^2 = 9$ (B liegt auf dem Graphen der Funktion f)
c. $C(4/8)$ in $f(x)$: $4^2 = 16 \neq 8$ (C liegt nicht auf dem Graphen der Funktion f)
d. $D(-7/49)$ in $f(x)$: (-7)^2 $= 49$ (D liegt auf dem Graphen der Funktion f)
e. $E(36/6)$ in $f(x)$: $36^2 \neq 6$ (E liegt nicht auf dem Graphen der Funktion f)
f. $F(-5/-25)$ in $f(x)$: $(-5)^2 = 25 \neq -25$ (F liegt nicht auf dem Graphen der Funktion f)

8.
a. Vorgehen wie bei **7.**, x- Wert in Funktionsgleichung einsetzen und prüfen, ob der errechnete y-Wert mit der y-Koordinate des Punktes überein stimmt. Die Punkte **B**, **C** und **D** liegen auf dem Funktionsgraphen von $f(x) = x^2 + 4x + 3$
b. $f(0) = 3, f(-2) = -1, f(-4) = 3$
c. Nullstellen mit p,q-Formel (siehe **QF2**): $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$
d. Skizze (siehe Abbildung)



9.
a. **falsch,** die Normalparabel wurde um drei Einheiten **nach rechts** verschoben
b. **wahr,** denn es gilt für verdoppelten x-Wert beim Einsetzen in die Normalparabel: $f(2x) = (2x)^2 = 4x^2$
c. **falsch**, die Scheitelpunktform eignet sich zum Ablesen des Scheitelpunkts und verdeutlicht die Lage des Funktionsgraphen im Koordinatensystem. Die allgemeine Form eignet sich zum Ablesen des y-Achsenabschnitts (Parameter c in der allgemeinen Form).

10.
a. $f_1(x) = (x-2)^2 + 4$
b. $f_2(x) = -2x^2 + 3$
c. $f_3(x) = x^2$ oder $f_4(x) = -x^2$