



Lineare Gleichungen mit zwei Variablen und Gleichungssysteme

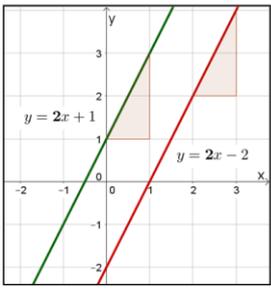
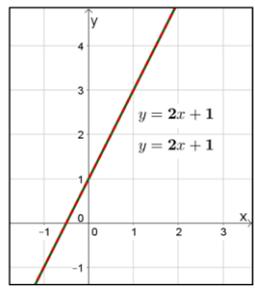
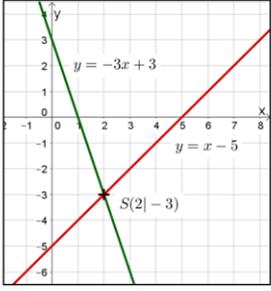
Bei vielen mathematischen Problemen müssen nicht nur eine Variable, sondern oft **mehrere Variablen** und Zusammenhänge berücksichtigt werden. Diese Zusammenhänge kann man in manchen Fällen mithilfe linearer Gleichungen beschreiben.

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen hat die allgemeine Form $a \cdot x + b \cdot y = c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ein **lineares Gleichungssystem (kurz: LGS)** besteht aus der Verknüpfung von mindestens zwei Gleichungen mit zwei Variablen. Im Folgenden werden lineare Gleichungssysteme mit genau **zwei Gleichungen und zwei Variablen** betrachtet. Man kann diese Gleichungssysteme **graphisch** oder **rechnerisch** lösen:

- beim **graphischen Lösen** formt man die Gleichungen **durch Auflösen nach y** um und zeichnet die Geraden (↪ **LF1**). Die Gleichung wird dabei als lineare Funktion aufgefasst. Die Lösungsmenge entspricht der Menge aller gemeinsamen Punkte der dargestellten Geraden (↪ **LF2**):

↪ Verweise
LF1 Graph und Gleichung linearer Funktionen
LF2 Lage linearer Funktionen

<p>Beispiel 1: $I: y = 2x + 1$ $II: y = 2x - 2$</p>  <p>LGS hat keine Lösung, da die zugehörigen Geraden parallel verlaufen und somit keinen gemeinsamen Punkt haben.</p>	<p>Beispiel 2: $I: y = 2x + 1$ $II: y = 2x + 1$</p>  <p>LGS hat unendlich viele Lösungen, da die zugehörigen Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben.</p>	<p>Beispiel 3: $I: y = -3x + 3$ $II: y = x - 5$</p>  <p>LGS hat genau eine Lösung, da sich die zugehörigen Geraden in genau einem Punkt schneiden. Die Koordinaten des Schnittpunktes $S(x, y)$ lösen als Zahlenpaar das Gleichungssystem.</p>
--	--	--

- beim **rechnerischen Lösen** wendet man eines der drei Verfahren an:

- ⇒ **Gleichsetzungsverfahren** (dieses lässt sich als rechnerische Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden interpretieren)
- ⇒ **Einsetzungsverfahren** (hier wird eine der Variablen durch einen Term ersetzt)
- ⇒ **Additions- bzw. Subtraktionsverfahren** (hier werden die Gleichungen passend addiert oder subtrahiert, sodass eine Variable wegfällt)

Beispiele zu den rechnerischen Lösungsverfahren finden sich auf der nächsten Seite.

LGS Lineare Gleichungssysteme

Thema: Lineare Gleichungssysteme lösen



Musterbeispiele – Rechnerische Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme

Allgemein dürfen folgende Äquivalenzumformungen am Gleichungssystem durchgeführt werden, da sie die Lösungsmenge nicht verändern:

- ⇒ Reihenfolge der Gleichungen im Gleichungssystem darf verändert werden (z. B. : I → II, II → I)
- ⇒ die Gleichungen dürfen mit Zahlen ungleich Null multipliziert und dividiert werden
- ⇒ zu einer Gleichung kann ein Vielfaches einer anderen Gleichung addiert oder subtrahiert werden (→Additionsverfahren)

Gleichsetzungsverfahren	Einsetzungsverfahren	Additionsverfahren
<p>Vorgehen: Beide Gleichungen werden nach einer Variablen aufgelöst. Die so erhaltenen Terme werden gleichgesetzt.</p>	<p>Vorgehen: Eine Gleichung wird nach einer Variablen aufgelöst. Den so entstandenen Term setzt man in die <u>andere</u> Gleichung ein.</p>	<p>Vorgehen: Beide Gleichungen sollten in Normalform $a \cdot x + b \cdot y = c$ gegeben sein bzw. umgeformt werden. Die Gleichungen werden dann so multipliziert oder dividiert, dass die Koeffizienten einer Variablen den gleichen Wert, aber unterschiedliche Vorzeichen haben. Durch Addition der beiden Gleichungen fällt bei einer der Gleichungen eine Variable weg. Oder man löst mittels des Subtraktionsverfahrens bei gleichen Koeffizienten.</p>

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I. } y + x = 3 \\ \text{II. } 4y - 2x = 6^* \end{array}$$

Gleichungen nach x auflösen

$$\begin{array}{l} \text{I.}' \quad x = 3 - y \\ \text{II.}' \quad x = 2y - 3 \end{array}$$

Terme auf der rechten Seite gleichsetzen

$$\begin{array}{l} \rightarrow 3 - y = 2y - 3 \\ -3y = -6 \\ y = 2 \end{array}$$

Setze $y = 2$ in I.':

$$\begin{array}{l} x = 3 - 2 \\ x = 1 \end{array}$$

Errechneten y -Wert in eine geeignete von den beiden Gleichung einsetzen.

Lösungsmenge: $L = \{(1|2)\}$

*detaillierte Nebenrechnung zum Umstellen der Gleichung II. nach x :

$$\begin{array}{l} 4y - 2x = 6 \quad | -4y \\ -2x = 6 - 4y \quad | :(-2) \\ x = -3 + 2y = 2y - 3 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I. } y + x = 2 \\ \text{II. } 4y + 4x = 6 \end{array}$$

Gleichungen I nach x auflösen

$$\begin{array}{l} \text{I.}' \quad x = 2 - y \\ \text{II. } \quad 4y + 4x = 6 \end{array}$$

Term auf der rechten Seite von I' in Gleichung II einsetzen (für die Variable x).

Term $(2 - y)$ in II:

$$\begin{array}{l} 4y + 4x = 6 \\ 4y + 4(2 - y) = 6 \\ 4y + 8 - 4y = 6 \\ 8 = 6 \quad * \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung!



Anmerkung: Ergibt sich beim rechnerischen Lösen eines Gleichungssystems am Ende der Umformungen eine wahre Aussage der Form $n = n$ mit $n \in \mathbb{R}$, z.B.: $3 = 3$, hat das zugehörige Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{I. } 2x + 3y = 1 \\ \text{II. } 4x + 4y = 2 \end{array}$$

Gleichungen sind in Normalform gegeben

Die erste Gleichung wird nun mit (-2) multipliziert und mit der zweiten Gleichung addiert:

$$\begin{array}{l} \text{I. } 2x + 3y = 1 \quad | \cdot (-2) \\ \text{II. } 4x + 4y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{I.}' \quad -4x - 6y = -2 \\ \text{II. } \quad 4x + 4y = 2 \end{array} \quad \rightarrow \text{I.}' + \text{II.}$$

$$\begin{array}{l} \text{I.}' \quad -4x - 6y = -2 \\ \text{I.}' + \text{II.} \quad -2y = 0 \end{array}$$

Damit ergibt sich direkt $y = 0$.

Setze $y = 0$ in I.:

$$\begin{array}{l} 2x + 3 \cdot 0 = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}$$

Lösungsmenge: $L = \left\{ \left(\frac{1}{2} \mid 0 \right) \right\}$

Durch die Addition enthält eine Gleichung nur noch eine Variable.

LGS Lineare Gleichungssysteme

Thema: Lineare Gleichungssysteme lösen



Übungsaufgaben

1. Welche der Gleichungen ist eine lineare Gleichung? Kreuze an!

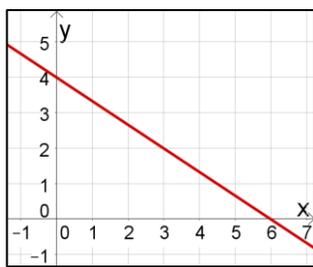
- $3x + 1 = y$ $x^2 + x = 1$ $x = \frac{6}{7} + 2y$
 $7z = \frac{5}{x}$ $8y = \frac{x}{4}$ $x^3 + \sqrt{x} = 3$

2. Gib für die Gleichungen jeweils zwei Zahlenpaare an, die die Gleichung erfüllen (mit $a, b, d, f, u, v, x, y \in \mathbb{R}$)!

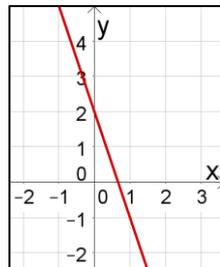
- a.** $a + b = 11$ **b.** $y = 2x + 1$
c. $12 - u = 2v$ **d.** $d + 1 = f - 2$

3. Welche der abgebildeten Geraden entspricht der Gleichung $6x + 2y = 4$?

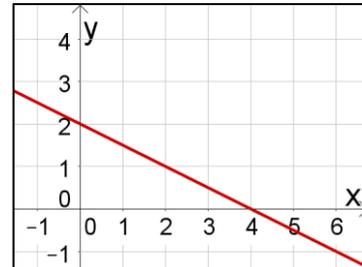
Wähle aus und begründe!



A



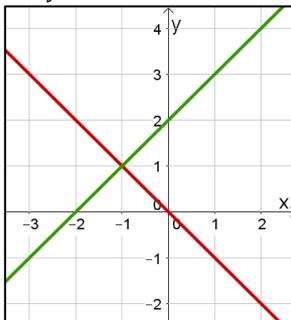
B



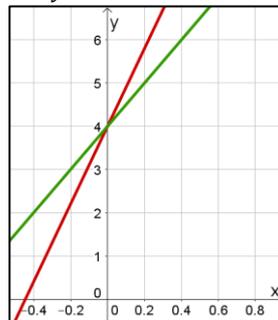
C

4. Im Folgenden wurden Gleichungssysteme graphisch gelöst. Lies die Lösung aus den graphischen Darstellungen ab!

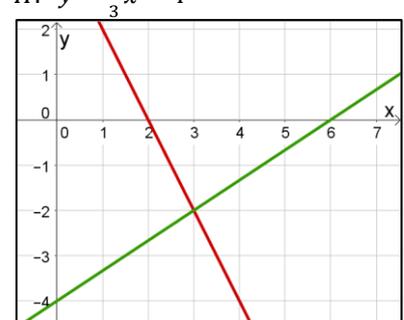
- I.** $y = x + 2$
II. $y = -x$



- I.** $y = 9x + 4$
II. $y = 5x + 4$



- I.** $y = -2x + 4$
II. $y = \frac{2}{3}x - 4$



5. Entscheide, ob das angegebene Zahlenpaar $(x|y)$ eine Lösung für das Gleichungssystem ist.

- a.** **I.** $2x + y = 10$ **b.** **I.** $3x + 6 = y$ **c.** **I.** $\frac{1}{2}x - y = 5$
II. $x - y = 2$ **II.** $-y = x + 2$ **II.** $x + y = 25$
L = {(4|2)}? **L = {(-1|1)}** **L = {(20|5)}**

6. Entscheide ohne Rechnung, ob das angegebene Gleichungssystem **genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen** hat! Begründe deine Antwort kurz! *Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!* ⓘ

- I.** $y = 2x + 2$
II. $y = x + 1$

- I.** $y = 7x - 1$
II. $y = 7x + 1$

- I.** $y = \frac{4}{6}x$
II. $y = \frac{2}{3}x$

eine Lösung,
 keine Lösung,
 unendlich viele Lösungen,
 weil: _____

eine Lösung,
 keine Lösung,
 unendlich viele Lösungen,
 weil: _____

eine Lösung,
 keine Lösung,
 unendlich viele Lösungen,
 weil: _____

LGS Lineare Gleichungssysteme

Thema: Lineare Gleichungssysteme lösen



7. Löse das lineare Gleichungssystem mit einer geeigneten Methode!

Hinweis: Hier können dir die Musteraufgaben helfen! 🍌

- | | | |
|---|--|--|
| <p>a. I. $y = 2x + 11$
II. $y = 3x - 15$</p> | <p>b. I. $-9y + x = 4$
II. $5y - 4 = x$</p> | <p>c. I. $x = 2 - 5y$
II. $10x - 10y = 0$</p> |
| <p>d. I. $x - 4y = 6$
II. $-2x - 4y = 6$</p> | <p>e. I. $2x + 3y = 6$
II. $3y = -2x + 5$</p> | <p>f. I. $x + y = 1$
II. $y = 2x + 4$</p> |

8. Welche graphische Lösung gehört zu welchem Gleichungssystem? Ordne zu!

A	B	C	D
(1) I. $y = -\frac{1}{4}x + 4$ II. $0,5x + 2y = 8$	(2) I. $14x - 7y = 21$ II. $-28x + 14y = 14$	(3) I. $3x - y = 5$ II. $y - 17 = -8x$	(4) I. $3y = 6$ II. $2x = 6$

9. Vermischtes!



- a.** Gib ein lineares Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen an!
- b.** Gib ein unlösbares Gleichungssystem an!
- c.** Löse das Gleichungssystem graphisch und rechnerisch: I. $12x - 4y = 16$
II. $15x - 5y = 10$

10. Stelle ein Gleichungssystem auf, das den Sachverhalt beschreibt und löse es! Was bedeuten die Variablen?

- a.** Die Summe zweier Zahlen beträgt 80. Die Differenz beider Zahlen beträgt 4.
- b.** In einem Käfig befinden sich 35 Hühner und Schweine. Insgesamt haben sie 94 Beine.
- c.** Tim ist vier Jahre älter als sein Bruder Lars. Zusammen sind sie 30 Jahre alt.

Lösungen

1. $3x + 1 = y$ $x^2 + x = 1$ $7z = \frac{5}{2}$ $8y = \frac{x}{2}$ $x^3 + \sqrt{x} = 3$

2. Gib für die Gleichungen jeweils zwei Zahlenpaare an, die die Gleichung erfüllen!
a. z.B.: $a = 5$ und $b = 6$ oder $a = 4$ und $b = 7$
b. z.B.: $x = 1$ und $y = 3$ oder $x = -2$ und $y = -3$
c. z.B.: $m = 1$ und $f = 4$ oder $m = -1$ und $f = 2$
d. z.B.: $d = 1$ und $f = 2$ oder $d = -1$ und $f = 2$

3. Graph B passt zur angegebenen Gleichung, da man die Gleichung zunächst nach y umstellen kann und erhält $y = -3x + 2$. Der Graph B hat eine Steigung von $m = -3$ und einen y -Achsenabschnitt von $b = 2$, was zur umgestellten Gleichung passt.
4. Man erhält die Lösungen durch das Ablesen der Schnittpunkte!
 Bild 1: Schnittpunkt $S(-1|1)$ $-x = -1$ und $y = 1$
 Bild 2: Schnittpunkt $S(0|4)$ $-x = 0$ und $y = 4$
 Bild 3: Schnittpunkt $S(3|-2)$ $-x = 3$ und $y = -2$
5. Entscheide, ob das angegebene Zahlenpaar (x, y) eine Lösung des Gleichungssystems ist
a. Setze $x = 4$ und $y = 2$ in **b.** Setze $x = -1$ und $y = 1$ in die Gleichungen:
 $I. 2 \cdot 4 + 2 = 10$ ✓
 $II. 4 \cdot 2 = 2$ ✓
 Das Zahlenpaar $(4|2)$ ist eine Lösung des LGS.
6. $I. y = 2x + 2$ keine Lösung.
 $II. y = x + 1$ eine Lösung.
 $I. y = 7x - 1$ keine Lösung.
 $II. y = 7x + 1$ eine Lösung.
 unendlich viele Lösungen.
 keine Lösung.
 unendlich viele Lösungen.
 eine Lösung.
 keine Lösung.
 unendlich viele Lösungen.
 eine Lösung.
 keine Lösung.
 unendlich viele Lösungen.
 well: die Geraden haben unterschiedliche Steigungen
 unterschiedliche y -Achsenabschnitte. Sie verlaufen somit parallel und haben somit keinen Punkt gemeinsam.
 well: die Geraden haben dieselbe Steigung aber unterschiedliche y -Achsenabschnitte. Sie verlaufen somit parallel und haben somit keinen Punkt gemeinsam.
 well: die Geraden identisch sind und somit unendlich viele Punkte gemeinsam haben. Die Steigung und der y -Achsenabschnitt der Geraden stimmen überein.

7. **a.** $I. x + y = 80$
 $II. x - y = 4$
 Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren: $x = 42$ und $y = 38$
 die die Bedingungen erfüllen x und y sind die gesuchten Zahlen.
b. $I. x + y = 35$
 $II. 2x + 4y = 94$
 Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren: $x = 23$ und $y = 12$
 y ist die Zahl der Schweine x ist die Zahl der Hühner
c. $I. T + L = 30$
 $II. T + L = 30$
 Lösung bspw. mit Einsetzungsverfahren: $T = 17$ und $L = 13$
 T steht für Trims Alter L steht für Lars Alter

8. Die Zuordnungen lauten: A-3, B-4, C-2, D-1. Man erhält die Lösungen, indem man die gegebenen Gleichungen nach y umstellt.
9. **a.** Beispiel für ein LGS: $I. y = 2x + 2$
 $II. y = 2x + 1$
 Graphisch betrachtet wären die Geraden parallel.
b. Beispiel für ein LGS: $I. y = 2x + 2$
 $II. y = 3x + 4$
 Die beiden Geraden liegen parallel. Das LGS hat keine Lösung.
10. $I = II \Rightarrow 4 \neq 2$
 Rechnerisch ergibt sich: $I. y = 2x + 4$
 $II. y = 3x + 2$
 $4(2x + 4) = 3x + 2$
 $8x + 16 = 3x + 2$
 $5x = -14$
 $x = -2,8$
 $y = 2(-2,8) + 4 = -1,6$
 Das LGS hat keine Lösung.

1. $I. y = 2x + 11$
 $II. y = 3x - 15$
 $x = 26$
 $y = -14$
 Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
 Für x : Term $(5y - 4)$ in Gleichung I einsetzen:
 $-9y + (5y - 4) = 4$
 $-4y - 4 = 4$
 $-4y = 8$
 $|-(-4)$
 $y = -2$
 Einsetzen in II: $5 \cdot (-2) - 4 = x \Rightarrow x = -14$

c. $I. x - 4y = 6$
 $II. -2x - 4y = 6$
 Hier eignet sich das Subtraktionsverfahren:
 Man kann beispielsweise $-II$ rechnen, um in einer Gleichung den Term $(-4y)$ zu eliminieren:
 $I. x - 4y = 6$
 $II. -2x - 4y = 6$
 $|-(-2) \cdot II$
 $20 - 50y - 10y = 0$
 $10(2 - 5y) - 10y = 0$
 $20 - 50y - 10y = 0$
 $|-(-60)$
 $y = \frac{3}{10}$
 Einsetzen in $I: x - 2 \cdot \frac{3}{10} = 6 \Rightarrow x = \frac{33}{5}$

e. $I. 2x + 3y = 6$
 $II. 3y = -2x + 5$
 Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
 Hier eignet sich das Einsetzungsverfahren:
 Für x : Term $(-2x + 5)$ in Gleichung I einsetzen:
 $2x + 3(-2x + 5) = 6$
 $2x - 6x + 15 = 6$
 $-4x = -9$
 $x = \frac{9}{4}$
 Einsetzen in $II: 3 \cdot \frac{9}{4} = 5 - 2x$
 $\frac{27}{4} = 5 - 2x$
 $2x = 5 - \frac{27}{4}$
 $2x = \frac{20}{4} - \frac{27}{4}$
 $2x = -\frac{7}{4}$
 $x = -\frac{7}{8}$