

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$



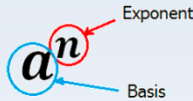
Die Rechenoperationen „Potenzieren“ und „Wurzelziehen“

Das Potenzieren ist eine **abgekürzte Schreibweise für mehrfaches Multiplizieren** einer Zahl oder eines Ausdrucks mit sich selbst. Mathematisch definiert man die Potenz a^n als:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal Faktor } a}$$

mit n aus den natürlichen Zahlen und a aus den reellen Zahlen.

Dabei nennt man a die **Basis** und n den **Exponent**.

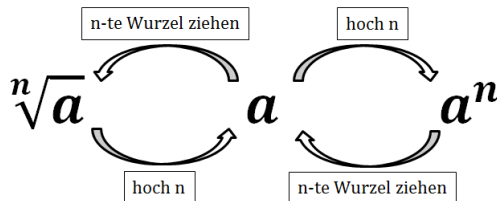


Die Potenzgesetze beschreiben Regeln zum Rechnen mit Potenzen und sind auf der rechten Seite zusammengefasst.

Die Umkehroperation zum Potenzieren ist das **Wurzelziehen**.

Es gilt zum Beispiel: $5^2 = 25$ und $\sqrt{25} = 5$

Allgemein wird das Ziehen der n -ten Wurzel durch das Potenzieren mit n rückgängig gemacht und umgekehrt. Für eine nichtnegative Zahl a gilt also:



Potenzgesetze P1-5:

Es seien a und b reelle Zahlen ungleich 0, m und n sind natürliche Zahlen. Es gilt dann:

- für Potenzen mit gleicher Basis:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ und}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (P1)$$

- für Potenzen mit gleichem Exponenten:

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m \text{ und}$$

$$a^m : b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (P2)$$

- für das Potenzieren von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (P3)$$

Weiterhin definiert man für alle $a \neq 0$ und n aus den natürlichen Zahlen:

$$a^0 = 1 \text{ und} \quad (P4)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (P5)$$

Wurzeln lassen sich auch als Potenzen schreiben und umgekehrt, denn es gilt

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (PW)$$

für $a \geq 0$, m aus den ganzen Zahlen und n aus den positiven natürlichen Zahlen. Es gelten durch diese Definition alle Rechenregeln, die auch für das Rechnen mit Potenzen gelten.

Musterbeispiel

Vereinfache den folgenden Term soweit wie möglich: $a^2 \cdot a^4 + \left(\frac{a^6}{a^2}\right) - (a^2)^3 + (a \cdot b)^4$

Lösung: Wir betrachten die einzelnen Summanden:

$$\bullet \quad a^2 \cdot a^4 = \underbrace{a \cdot a}_{a^2} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{a^4} = a^{2+4} = a^6 \quad (P1)$$

$$\bullet \quad \frac{a^6}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{6-2} = a^4 \quad (P1)$$

$$\bullet \quad (a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6 \quad (P3)$$

$$\bullet \quad (a \cdot b)^4 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = a^4 \cdot b^4 \quad (P2)$$

Zusammengefasst vereinfacht sich der Term wie folgt:

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^4 + \left(\frac{a^6}{a^2}\right) - (a^2)^3 + (a \cdot b)^4 &= a^6 + a^4 - a^6 + a^4 \cdot b^4 \\ &= a^4 + a^4 \cdot b^4 \\ &= \underline{a^4 \cdot (b^4 + 1)} \end{aligned}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$



Übungsaufgaben

Hinweis: Es wird vorausgesetzt, dass alle Variablen nur Werte ungleich Null annehmen.

1. Kreuze die richtigen Aussagen an! Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!

☐ $x^2 + 2x^2 = 3x^2$

☐ $b^3 \cdot b^4 = b^7$

☐ $\frac{a^6}{a^4} = a^2$

☐ $\frac{1}{c^4} = -c^4$

☐ $a^2 + a^3 = a^5$

☐ $u^3 \cdot u^3 = u^9$

☐ $y^{-4} : y^{-4} = 1$

☐ $(l^2)^3 = l^5$

Tipp: Nutze bei den Aufgaben 2 und 3 die Beziehung (PW) und bei Aufgabe 4 und 5 die Beziehung (P5) aus dem Infokasten!

2. Schreibe als Potenz!

a. $\sqrt{7}$

b. $\sqrt[4]{10}$

c. $\sqrt[6]{\left(\frac{4}{5}\right)}$

d. $\sqrt{b^3}$

e. $\sqrt[3]{5^4}$

3. Schreibe als Wurzel!

a. $3^{\frac{1}{2}}$

b. $a^{\frac{1}{6}}$

c. $b^{\frac{3}{4}}$

d. $5^{-\frac{3}{7}}$

e. $g^{2,5}$

4. Stelle mit positivem Exponenten dar!

a. x^{-2}

b. $(a \cdot b)^{-4}$

c. $\frac{x^{-1}}{3}$

d. $\left(\frac{1}{x}\right)^{-2}$

5. Stelle mit negativem Exponenten dar!

a. $\frac{1}{x}$

b. $\frac{1}{a^2}$

c. $\frac{3}{b}$

6. Kopfrechnen Berechne ohne Taschenrechner!

a. 2^4

b. -2^4

c. $(-2)^4$

d. 2^{-4}

e. -2^{-4}

f. $(-2)^0$

g. $\frac{8^7}{8^5}$

h. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

i. 10^{-2}

j. $2^4 \cdot 5^4$

7. Fasse die Terme mithilfe der Potenzgesetze zusammen! Stelle das Ergebnis mit positivem Exponenten dar!

Hinweis: Hier kann dir der Infokasten und die Musteraufgabe helfen!

a. $2^{-4} \cdot 2^5$

b. $\frac{48^{-1}}{16^{-1}}$

c. $y^4 \cdot (-z)^4$

d. $b^{3x} : b^x$

e. $a^4 \cdot a^{x+2}$

f. $(c^{-4})^3$

g. $4^{-1} \cdot b^{-1}$

h. $10x^5 \cdot (-x^3) \cdot x$

i. $\frac{a^8}{4a^2}$

j. $\frac{b^{\frac{1}{2}}}{b}$

8. Fasse die Wurzelterme zusammen!

a. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$

b. $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$

c. $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$

d. $a \cdot \sqrt{a^2}$

e. $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt[3]{v}}$

f. $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{a}$

g. $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{x}$



Hinweis: Zum Vereinfachen von Wurzeltermen kann man **Wurzeln in Potenzen umschreiben** (PW) und die Potenzgesetze nutzen.

9. Wie kann man $\sqrt[3]{48}$ noch darstellen? Hinweis: Mehrere Antworten können richtig sein!

☐ $48^{\frac{1}{3}}$

☐ 16

☐ $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{6}$

☐ $4 \cdot \sqrt[3]{6}$

☐ $2 \cdot \sqrt[3]{6}$

☐ $\frac{1}{48^{-3}}$

10. Kreuze die zum gegebenen Term äquivalenten Terme an! Hinweis: Mehrere Antworten können richtig sein!

a. $(a^3 b^{-5} c)^{-4}$

☐ $a^{-1} b^{-9} c^{-3}$

☐ $a^{-12} b^{20} c^{-4}$

☐ $\frac{1}{(a^{-3} b^5 c)^4}$

☐ $\frac{b^{20}}{a^{12} c^4}$

b. $y^{(-3)^2}$

☐ y^9

☐ $\frac{1}{y^6}$

☐ y^{-9}

☐ $\frac{1}{y^9}$

c. $2x^{-2} + 2y^{-2}$

☐ $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2y^2}$

☐ $2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$

☐ $\frac{2}{x^2 + y^2}$

☐ $\frac{2x^2 + 2y^2}{(xy)^2}$

d. $\frac{a^{-1} \cdot b^3}{a \cdot b^{-2}}$

☐ $1^{-1} \cdot b$

☐ $\frac{b^5}{a^2}$

☐ $\frac{b^2}{a^2 \cdot b^{-3}}$

☐ $\frac{(a \cdot b)^{-2}}{(a \cdot b)^{-2}}$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

11. Fülle die Kästchen aus, sodass die Gleichung stimmt!

a. $2^4 \sqrt[4]{a^{\square} \cdot 3} = \sqrt[4]{a^3}$

b. $3^{\square} = 27$

c. $3^{\square} = 9^2$

d. $(\sqrt[4]{2})^{\square} = \sqrt[4]{8}$

e. $\frac{z^{-3}}{z^{\square}} = z^4$

f. $7,34 \cdot 10^{\square} = 7340$

12. Entscheide welche Aussagen wahr oder falsch sind!
Begründe deine Entscheidung kurz!

	wahr	falsch	Begründung
a. Für alle $a, b \geq 0$ und n aus den natürlichen Zahlen gilt: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$			
b. Für alle $a \geq 0$ gilt: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a$			
c. Für alle $a \geq 0$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$			

13. *** Vermischtes!

a. Löse die Klammer auf und fasse zusammen: $\frac{1}{2}(x^2 - y^3)^2$

b. Setze in die Gleichung $V = \frac{s}{t}$ für $s = 10^{-1}$ und $t = \sqrt[3]{8}$ ein und berechne V .

c. Vereinfache soweit wie möglich: $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$

Verweis
BIN Binomische
Formeln



Lösungen

11. Fülle die Kästchen aus, sodass die Gleichung stimmt!

a. $2^4 \sqrt[4]{a^{\square} \cdot 3} = \sqrt[4]{a^3}$ ☐ $\square = 3$

b. $3^{\square} = 27$ ☐ $\square = 3$

c. $3^{\square} = 9^2$ ☐ $\square = 4$

d. $(\sqrt[4]{2})^{\square} = \sqrt[4]{8}$ ☐ $\square = 2$

e. $\frac{z^{-3}}{z^{\square}} = z^4$ ☐ $\square = -7$

f. $7,34 \cdot 10^{\square} = 7340$ ☐ $\square = 3$

12. Entscheide welche Aussagen wahr oder falsch sind!
Begründe deine Entscheidung kurz!

a. Für alle $a, b \geq 0$ und n aus den natürlichen Zahlen gilt: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ☐ **wahr**

b. Für alle $a \geq 0$ gilt: $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a$ ☐ **falsch**

c. Für alle $a \geq 0$ gilt: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$ ☐ **wahr**

13. *** Vermischtes!

a. Löse die Klammer auf und fasse zusammen: $\frac{1}{2}(x^2 - y^3)^2$
 $\frac{1}{2}(x^4 - 2x^2y^3 + y^6) = \frac{1}{2}x^4 - x^2y^3 + \frac{1}{2}y^6$

b. Setze in die Gleichung $V = \frac{s}{t}$ für $s = 10^{-1}$ und $t = \sqrt[3]{8}$ ein und berechne V .
 $V = \frac{10^{-1}}{2} = 0,05$

c. Vereinfache soweit wie möglich: $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$
 $\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} = x^1 = x$

1. Kreuzze die richtigen Aussagen an! Hinweis: Hier kann dir der Infokasten helfen!

a. $x^2 + 2x^2 = 3x^2$ ☒ **wahr**

b. $b^3 \cdot b^4 = b^7$ ☒ **wahr**

c. $a^6 = a^2$ ☐ **falsch**

d. $a^2 + a^3 = a^5$ ☐ **falsch**

e. $y^{-4} \cdot y^{-4} = y^{-8}$ ☒ **wahr**

f. $(t^2)^3 = t^5$ ☐ **falsch**

2. $\sqrt[4]{16} = 2$ ☒ **wahr**

3. $\sqrt[3]{8} = 2$ ☒ **wahr**

4. $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ☒ **wahr**

5. $\frac{x}{x} = 1$ ☒ **wahr**

6. $2^4 = 16$ ☒ **wahr**

7. $2^{-4} = \frac{1}{16}$ ☒ **wahr**

8. $-2^{-4} = -\frac{1}{16}$ ☒ **wahr**

9. $2^4 \cdot 2^4 = 16$ ☒ **wahr**

10. $(-2)^4 = 16$ ☒ **wahr**

11. $2^4 = 16$ ☒ **wahr**

12. $2^4 = 16$ ☒ **wahr**

13. $2^4 = 16$ ☒ **wahr**