Was kann man aus einem Funktionsgraphen ablesen?

Anhand eines Funktionsgraphen kann man viele Informationen ablesen, zum Beispiel die Nullstellen der Funktion. Zwei wesentliche Aspekte, die man an Funktionsgraphen untersuchen kann, sind:

- **Zuordnung** Welche Funktionswerte werden einem bestimmten x-Wert zugeordnet? (*Bild 1*)
  Welche x-Werte sind einem bestimmten Funktionswert zugeordnet? (*Bild 2*)
- **Veränderung** Wie ändern sich die Funktionswerte, wenn sich die x-Werte ändern? *(Bild 3)*
  Wie ändern sich die x-Werte, wenn sich die Funktionswerte ändern? (*Bild 3*)

Bild 1

Die Stelle $x = 2$ hat den zugehörigen Funktionswert $f(x) = 3$.

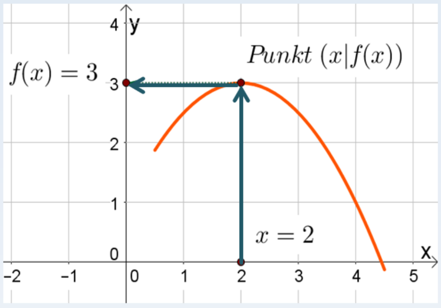


Bild 2

Dem Funktionswert $f(x) = 2$ sind die Werte $x = 1$ und $x = 3$ zugeordnet.

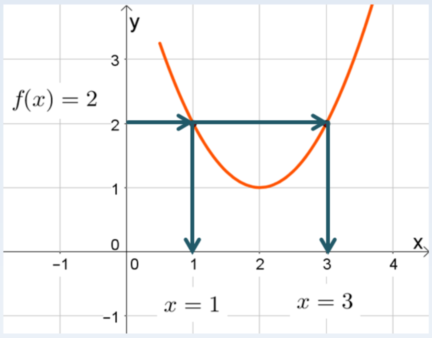
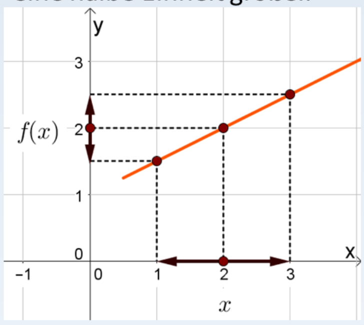
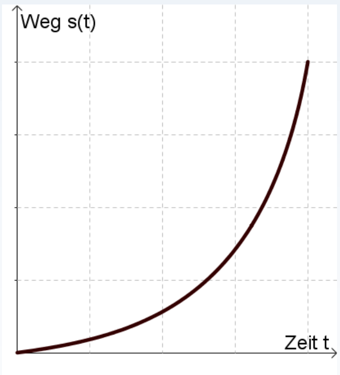


Bild 3

Wenn x um eine Einheit größer wird, wird der zugehörige Funktionswert $f(x)$ jeweils um eine halbe Einheit größer.



Sachsituationen mit Funktionsgraphen darstellen

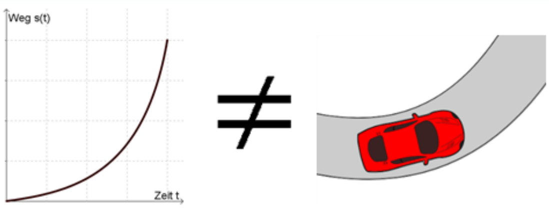


Graphen werden häufig benutzt, um Sachverhalte aus dem Alltag darzustellen. Oft handelt es sich um Situationen, in denen der **Weg oder die Geschwindigkeit eines Objekts** eine Rolle spielen.

<u>Beispiel 1:</u>
In der nebenstehenden Abbildung ist die Weg-Zeit-Funktion eines Autos dargestellt. Jeder Zeit t ist der zurückgelegte Weg $s(t)$ zugeordnet. Im Beispiel nimmt der zurückgelegte Weg mit der Zeit immer stärker zu.

Typische Fehler und Schwierigkeiten beim Interpretieren von Funktionsgraphen

Ein häufiger Fehler ist das Interpretieren eines Funktionsgraphen als **reales Abbild der Situation**. Der Graph beschreibt jedoch eine Situation nicht direkt. Es erfolgt immer noch der Zwischenschritt, indem die Situation zunächst mathematisch als eine Menge von Zahlenpaaren (Beispiel 1: „Zeit“ → „zurückgelegter Weg“) beschrieben wird.



<u>Beispiel 2:</u>
Ein typischer **Fehler** bei Beispiel 1 wäre die Interpretation des Graphen als *Linkskurve.* Auch wenn der Graph einer Linkskurve ähnlich sieht, wird nichts über den Straßenverlauf ausgesagt!

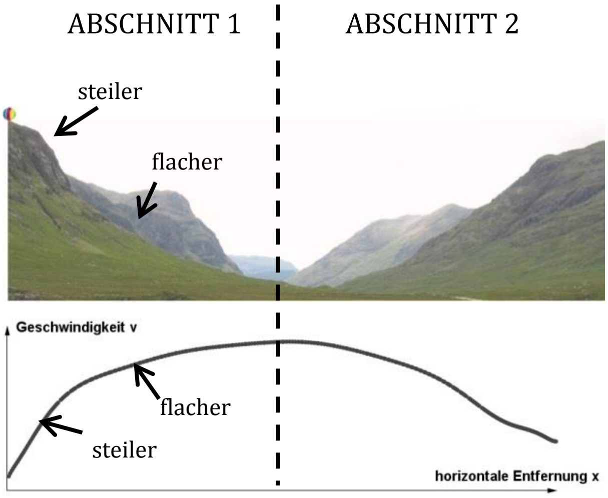
Musterbeispiel I – Graphische Darstellung eines Sachkontextes

Ein Ball rollt einen Hügel hinunter und dann wieder hinauf. Zeichne den Verlauf der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung in das Koordinatensystem.

Lösung:

Um den Graph eines Sachverhalts zu zeichnen, muss zunächst die **Achsenbeschriftung** beachtet werden. Was bildet die x-Achse ab, was bildet die y-Achse ab? *(Hinweis: Eine Achsenskalierung (Beschriftung mit Zahlenwerten) ist hier nicht notwendig, da es um den qualitativen Verlauf des Graphen geht. Es ist also egal, ob der Ball mit 5 oder 50 km/h den Berg hinunter rollt.)*

Um den Graph zu zeichnen, ist es sinnvoll, die Situation zunächst in verschiedene **Abschnitte einzuteilen**. Betrachte im Beispiel zunächst den Abschnitt, in dem der Ball ins Tal hinunter rollt und anschließend den Abschnitt, in dem der Ball wieder hinauf rollt.

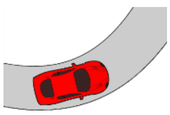


Im **ersten Abschnitt steigt die Geschwindigkeit des Balls** an, da er den Hügel hinunter rollt und dabei immer mehr beschleunigt.

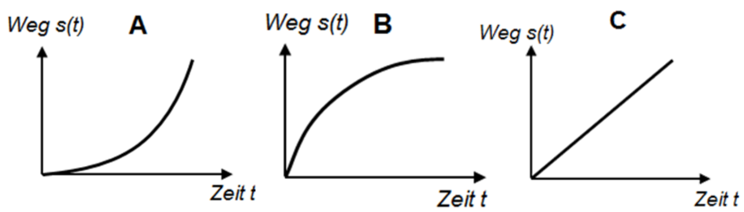
Beachte: An besonders steilen Stellen steigt die Geschwindigkeit sehr schnell. An flacheren Stellen steigt die Geschwindigkeit langsamer. Im Tal erreicht der Ball die maximale Geschwindigkeit.

Sobald der Ball bergauf rollt (Abschnitt 2), nimmt seine Geschwindigkeit wieder ab.

Musterbeispiel II – Autofahrt



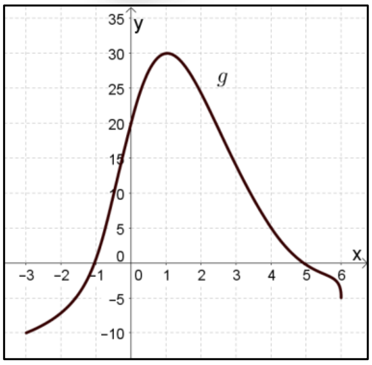
Ein Auto durchfährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Linkskurve. Der Funktionswert $s(t)$ gibt den zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt t an. Welcher der Zeit-Weg-Graphen beschreibt seine Fahrt am besten?



Lösung:

Graph C beschreibt die Fahrt des Autos am besten, da das Auto laut Aufgabenstellung die Kurve mit *gleichbleibender Geschwindigkeit* durchfährt. Die Steigung des Graphen C ist konstant, das bedeutet die Geschwindigkeit bleibt gleich. Graph A stellt einen typischen Fehler dar (siehe Infokasten).

Übungsaufgaben



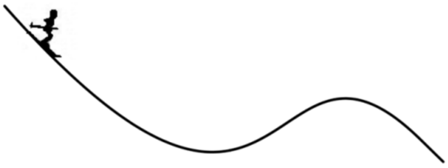
1. Gegeben ist der Graph der Funktion g (siehe Abbildung rechts). **AF1**

- **a.** Wie groß ist der Funktionswert an der Stelle 4?
- **b.** An welcher Stelle beträgt der Funktionswert 30?
- **c.** Für welche x-Werte gilt $g(x) \leq 20$?
- **d.** Für welche x-Werte wird der größte bzw. der kleinste Funktionswert angenommen?

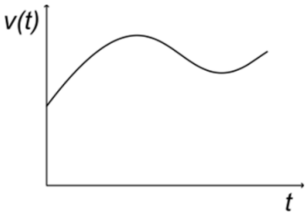
Verweise

AF1 Arbeiten mit Funktionen

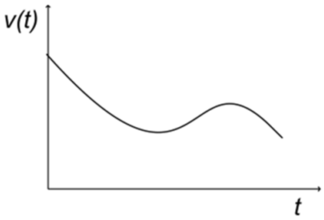
2. In folgendem Bild ist ein Skifahrer zu sehen, der den Hang hinunter fährt. Der Funktionswert $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t an. Welcher Graph beschreibt die Situation am besten? Begründe deine Antwort kurz.



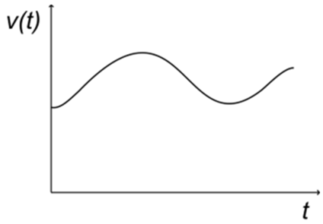
a.



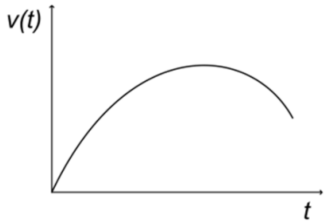
b.



c.

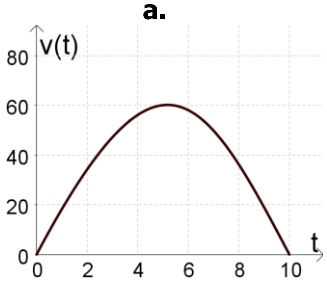


d.

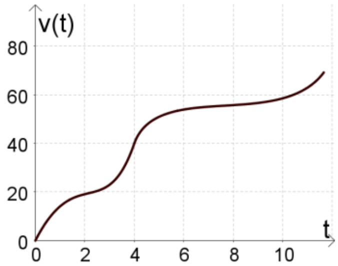


3. In den folgenden Graphen werden die Fahrten von Autos beschrieben. Dabei ist die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Autos zum Zeitpunkt t dargestellt (t in Minuten, $v(t)$ in km/h). Beschreibe jeweils die Fahrt des Autos!

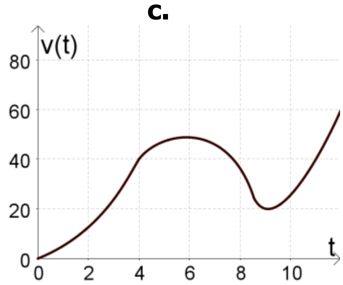
a.



b.



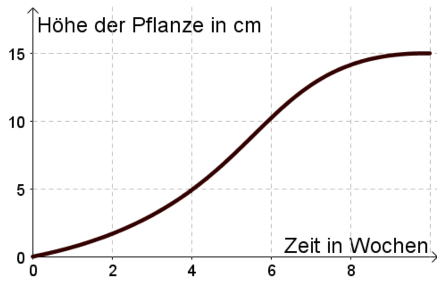
c.



4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x + 1$

- **a.** Wie ändert sich der Funktionswert, wenn sich der x-Wert um eine Einheit vergrößert.
- **b.** Wie ändert sich der x-Wert, wenn man den Funktionswert verkleinert.
- **c.** Wie ändert sich der Funktionswert, wenn man den x-Wert um eine Einheit verkleinert?

5. Der Graph zeigt die Wachstumskurve einer Pflanze. Abgebildet ist die Höhe der Pflanze in Zentimeter in Abhängigkeit von der Zeit in Wochen.

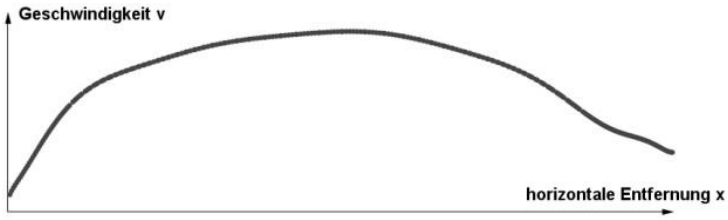


- **a.** Warum verläuft der Graph durch den Ursprung?
- **b.** Wann war die Pflanze 5cm hoch?
- **c.** Wie hoch war die Pflanze nach 8 Wochen?
- **d.** In welchem Alter ist die Pflanze am meisten gewachsen?

6. Ein Ball rollt mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Der Ball rollt dann einen Hügel hinauf und wieder hinunter.

a. Zeichne den Verlauf der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung in das Koordinatensystem. *Hinweis: Hier kann dir die Musteraufgabe I helfen!*

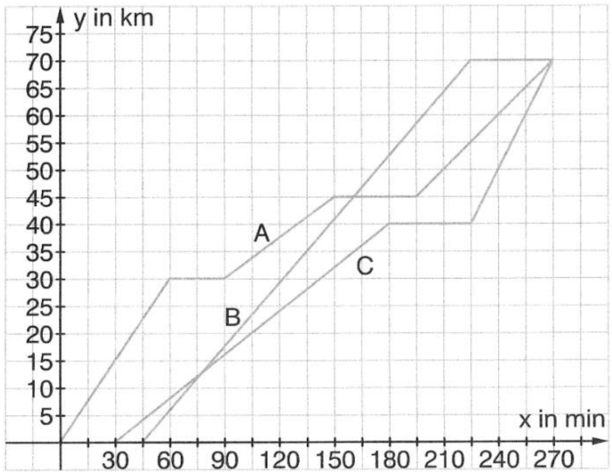
b. Ein Schüler hat die Aufgabe folgendermaßen gelöst:



Dabei wurde einen typischer Fehler gemacht, denn die Situation wurde direkt in den Graphen übertragen. Begründe, warum dieser Graph die Situation nicht passend beschreibt.

---

7. **Jan (A)**, **Tobias (B)** und **Marc (C)** fahren von Entenhausen nach Mühlhausen. Dies wird durch den folgenden Graphen beschrieben:



Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und begründe deine Antwort kurz!

	wahr	falsch	Begründung
a. Alle kommen zur gleichen Zeit in Mühlhausen an.			
b. Die Graphen zeigen eindeutig, dass Mühlhausen höher liegt als Entenhausen, da alle Fahrer bergauf fahren.			
c. Tobias macht unterwegs keine Pause.			
d. Tobias fährt 45 Minuten nach Jan los			

8. Erstelle zu den beiden folgenden Situationen einen Graphen. Beschrifte die Achsen mit den Begriffen in den Klammern. *(Hinweis: Eine Achsenskalierung (Beschriftung mit Zahlenwerten) ist hier nicht notwendig, da es um den qualitativen Verlauf des Graphen geht.)*

a. Situation 1: „Im Frühling wächst das Gras sehr schnell, aber seit wir diese trockene und heiße Periode haben, wächst es nur noch langsam." (Länge des Grases/ Zeit)

b. Situation 2: „Wenn ich ein Puzzle mache, sortiere ich für gewöhnlich die erste halbe Stunde die Randteile aus. Wenn ich alle aussortiert habe, setze ich den Rand zusammen und beginne anschließend damit, das Puzzle zu füllen. Das geht zunächst langsam, ich werde aber immer schneller, da immer weniger Teile übrig bleiben." (Teile im Puzzle/ Zeit)

Lösungen

1. a. $g(4) = 5$ **b.** $g(x) = 30$ für $x = 1$
c. $g(x) \leq 20$ für alle $x \in [-3; 0]$ und für alle $x \in [2{,}5; 6]$
d. größter Funktionswert ist 30 und wird bei $x = 1$ angenommen, kleinster Funktionswert ist -10 und wird bei $x = -3$ angenommen

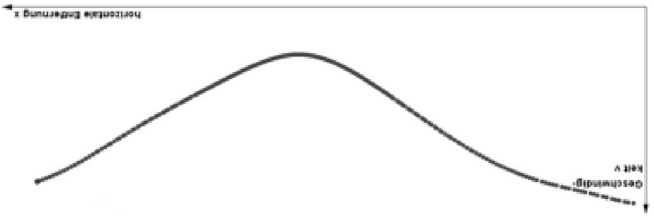
2. Graph a. beschreibt die Situation am besten. Die Geschwindigkeit nimmt zu Beginn der Abfahrt zu und dann wird sie im Tal maximal. Dann kommt ein Hügel und die Geschwindigkeit des Skifahrers nimmt dadurch ab.

3.
a. Das Auto fährt mit steigender Geschwindigkeit in den ersten etwa 5 Minuten. Die Geschwindigkeit erreicht bei 5 Minuten mit 60 km/h ihr Maximum. Im Anschluss nimmt die Geschwindigkeit wieder ab und das Auto kommt nach 10 Minuten wieder zum Stehen.
b. Das Auto fährt mit zunehmender Geschwindigkeit los. Die Geschwindigkeit nach einer Minute Fahrt bleibt etwa eine Minute annähert konstant bei 20 km/h. Im Anschluss beschleunigt das Auto wieder, bis nach etwa 5 Minuten eine annähernd konstante Geschwindigkeit von etwa 57 km/h erreicht wird. Nach weiteren 5 Minuten beginnt das Auto wieder zu beschleunigen.
c. Das Auto fährt mit zunehmender Geschwindigkeit los. Bei etwa 6 Minuten erreicht das Auto eine Geschwindigkeit von etwa 50 km/h und wird danach langsamer bis es nach 9 Minuten, bei 20 km/h wieder beginnt zu beschleunigen.

4. a. Wenn sich x um eine Einheit vergrößert, wächst der Funktionswert $f(x)$ um 3 Einheiten, da gilt:
$$f(x_0+1) = 3(x_0+1)+1 = 3x_0+3+1 = f(x_0)+3$$
b. Verkleinert sich der Funktionswert, so verkleinert sich auch der x-Wert
c. Wenn sich der x-Wert um eine Einheit verkleinert, verkleinert sich der Funktionswert um 3 Einheiten, da gilt:
$$f(x_0-1) = 3(x_0-1)+1 = 3x_0-3+1 = f(x_0)-3$$

5. a. Der Graph verläuft durch den Ursprung, da die Pflanze zu Beginn der Messung null Zentimeter hoch ist.
b. Nach 4 Wochen, war die Pflanze 5 cm hoch.
c. Nach 8 Wochen war die Pflanze etwa 14 cm hoch.
d. Zwischen 4 und 6 Wochen ist die Pflanze *am meisten* gewachsen ist. Dies entspricht der Stelle des Graphen mit der maximalen Steigung, also in einem Alter von ca. 5 Wochen.
Achtung: Ein typischer Fehler besteht darin, bei der Formulierung „am meisten" die Stelle des maximalen Funktionswerts zu nennen. Hier wäre dies bei 8-10 Wochen. Dies ist jedoch die maximale *Höhe* der Pflanze im abgebildeten Zeitraum und nicht die Stelle, an der die Pflanze am schnellsten gewachsen ist (also am meisten Höhe *zugenommen* hat). Es ist also wichtig, darauf zu achten, auf was sich die Formulierung „am meisten" bezieht, auf den maximalen Funktionswert oder die maximale Steigung.

6. a. Graph:

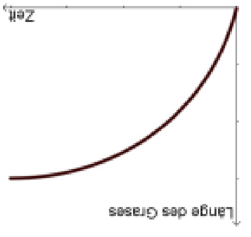


b. Bei dem falsch gezeichneten Graph steigt die Geschwindigkeit zuerst an, dann nimmt sie ab. In der Situation hingegen nimmt die Geschwindigkeit erst ab, dann steigt sie an.

7. a. falsch – Tobias (Graph B) erreicht die 70 km zu erst (nach 225 Minuten).
b. falsch – Bei den Graphen wird die Zeit in Minuten dem Weg in Kilometern zugeordnet. Es wird nichts über die Höhe des Ortes ausgesagt.
c. richtig – Das ist richtig. Tobias fährt durch bis 70 km und macht vorher keine Pause, da der Graph **keine** Abschnitt enthält, bei denen sich über einen bestimmten Zeitraum der Kilometerstand nicht ändert.
d. richtig- Graph B (Tobias) hat die Nullstelle $x = 45$,Graph A (Jan) verläuft hingegen durch den Ursprung. Im Kontext bedeutet das, dass Tobias 45 min. nach Jan startet.

8.

Situation 1



Situation 2